Листок 1. Дифференциальные кольца

Упражнение 1.1. Дифференцирования в положительной характеристике

(i) Приведите пример конечного расширения полей $K \subset L$ и дифференцирования поля K, не продолжающегося на поле L. (Указание: рассмотрите несепарабельное расширение.)

(ii) Покажите, что на совершенном поле K положительной характеристики нет ненулевых дифференцирований.

Упражнение 1.2. Недифференциальное поле

Приведите пример поля K и подпространства $D \subset \mathrm{Der}(K)$, для которого $[D, D]$ не содержится в D. (Указание: минимальный возможный случай заключается в расширении полей $\mathbb{Q} \subset K$ степени трансцендентности 3.)

Упражнение 1.3. Коммутирующий базис

Пусть R — гладкая алгебра над полем k, а (R, D_R) — дифференциальное кольцо, соответствующее некоторому инъективному отображению $D_R \to \mathrm{Der}_k(R)$ с проективным коядром. Докажите, что локально в топологии Зарисского на $\mathrm{Spec}(R)$ в D_R существует коммутирующий базис, т.е. что для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset R$ существует элемент $f \in R$, для которого $f \notin \mathfrak{p}$ и $D_R[f^{-1}]$ является свободным модулем над $R[f^{-1}]$ с базисом $\partial_1, \ldots, \partial_n$, причем $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. (Указание: действуйте подобно доказательству аналогичного утверждения над полем, а также воспользуйтесь леммой Накаяма.)

Упражнение 1.4. Комплекс де Рама дифференциального кольца

Для произвольного дифференциального кольца (R, D_R) положим $\Omega_R := D_R^\vee$. Пусть отображение $d\colon R \to \Omega_R$ сопоставляет элементу $a \in R$ R-линейный функционал $\partial \mapsto \partial(a)$ на D_R, а отображение $d\colon \Omega_R \to \wedge_R^2 \Omega_R$ сопоставляет элементу $\omega \in \Omega_R$ R-линейный функционал

$$\partial_1 \wedge \partial_2 \longmapsto \partial_1(\omega(\partial_2)) - \partial_2(\omega(\partial_1)) - \omega([\partial_1, \partial_2])$$

на $\wedge_R^2 D_R$.

(i) Покажите, что композиция $d^2\colon R \to \wedge^2_R \Omega_R$ обращается в нуль.

(ii) Докажите, что d продолжается единственным образом до дифференциала на $\wedge^\bullet_R \Omega_R$, относительно которого градуированная алгебра $\wedge^\bullet_R \Omega_R$ оказывается dg-алгеброй, т.е. для любых элементов $\omega \in \wedge^i_R \Omega_R$, $\eta \in \wedge^j_R \Omega_R$ выполняется равенство $d(\omega \wedge \eta) = d(\omega) \wedge \eta + (-1)^i \omega \wedge d(\eta)$. Чему при этом соответствует обращение в нуль композиции $d^2\colon \Omega_R \to \wedge^3_R \Omega_R$?

(iii) Покажите, что для любого конечно порожденного проективного R-модуля P имеется биекция между струкурами дифференциального кольца на (R, P) и структурами dg-алгебры на градуированной алгебре $\wedge^\bullet_R(P^\vee)$.

Упражнение 1.5. Морфизмы дифференциальных колец

Пусть (R, D_R), (S, D_S) — дифференциальные кольца, $\varphi\colon R \to S$ — гомоморфизм колец, а $\varphi_*\Omega_R \to \Omega_S$ — морфизм R-модулей.

(i) Пусть φ_* задает морфизм дифференциальных колец, а именно коммутирует с дифференцированиями и удовлетворяет условию интегрируемости, т.е. выполняются равенства

$$d\varphi = \varphi d\colon R \longrightarrow \Omega_S\,, \qquad d\varphi_* = \varphi_* d\colon \Omega_R \longrightarrow \wedge^2_R \Omega_R\,,$$

соответственно. Покажите, что тогда φ_* является морфизмом комплексов де Рама, т.е. коммутирует с дифференциалом во всех степенях.

(ii) Выпишете явно условия коммутирования с дифференцированиями и интегрируемости в терминах отображения $D_\varphi\colon D_S \to S \otimes_R D_R$, двойственного к отображению $S \otimes_R \Omega_R \to \Omega_S$, соответствующему φ_*. (Указание: выразите ответы в терминах разложений $D_\varphi(\partial) = \sum_i b_i \otimes \partial_i$, где $\partial \in D_S$, $b_i \in S$, $\partial_i \in D_R$.)

(iii) Постройте пример отображения φ_*, для которого выполнено условие коммутирования с дифференцированиями, но не выполнено условие интегрируемости. (Указание: например, рассмотрите гомоморфизм $R = k[x, y, z] \to S = k[x, y]$, заданный факторизацией по идеалу (z), $\Omega_R = R \cdot dx + R \cdot dy + R \cdot (1/z)dz$, $\Omega_S = S \cdot dx + S \cdot dy$, и всевозможные отображения $\varphi_*\colon \Omega_R \to \Omega_S$, для которых $dx \mapsto dx$, $dy \mapsto dy$.)

Упражнение 1.6. Константы и дифференциальные идеалы

Пусть (R, D_R) — дифференциальное кольцо.

(i) Покажите, что если R является областью целостности, то R^{D_R} сепарабельно замкнуто в R, т.е. если для элемента $a \in R$ существует многочлен $f \in R^{D_R}[T]$, для которого $f(a) = 0$, $f'(a) \neq 0$, то $a \in R^{D_R}$.

(ii) Пусть $(K, D_K) \to (R, D_R)$ — строгий морфизм дифференциальных колец, причем K является полем. Покажите, что если элемент $a \in R^{D_R}$ алгебраичен над K, то a также алгебраичен и над K^{D_K}.

(iii) Пусть идеал $I \subset R$ порожден элементами a_i, $i \in I$, причем для любого $\partial \in D_R$ выполнено $\partial(a_i) \in I$. Покажите, что тогда I является D_R-идеалом.

(iv) Покажите, что для любого набора констант $a_i \in R^{D_R}$, $i \in I$, идеал $(a_i)_{i \in I} \subset R$ является D_R-идеалом.

Упражнение 1.7. Дифференциальные поля коразмерности один

Пусть (K, D_K) — дифференциальное поле, $D \subset D_K$ — гиперплоскость над K, заданная, как аннулятор элемента $\omega \in \Omega_K$.

(i) Покажите, что (K, D) является дифференциальным полем, т.е. $[D, D] \subset D$, тогда и только тогда, когда $d\omega \in \omega \wedge \Omega_K \subset \wedge^2_K \Omega_K$ или, что равносильно, $\omega \wedge d\omega = 0 \in \wedge^3_K \Omega_K$.

(ii) Пусть (K, D) является дифференциальным полем и пусть элемент $\eta \in \Omega^1_K$ такой, что $d\omega = \omega \wedge \eta$. Проверьте, что элемент $\eta \wedge d\eta \in \wedge^3_K \Omega_K$ замкнут, а его класс в $H^3_{dR}(K, D_K)$ не зависит от выбора η. Данный класс называется инвариантом Годбийона–Вея для D.

(iii) Покажите, что элемент $f \in K$ является D-константой тогда и только тогда, когда $\omega \wedge df = 0$.