Листок 2. Дифференциальные модули

Ниже (R, D_R) обозначает произвольное дифференциальное кольцо.

Упражнение 2.1. Кривизна связности

Пусть M является R-модулем со связностью $\nabla\colon M \to \Omega_R \otimes_R M$, т.е. аддитивным гомоморфизмом, удовлетворяющим правилу Лейбница: $\nabla(am) = da \otimes m + a\,\nabla(m)$. Покажите, что тогда отображение *кривизны* $\nabla^2\colon M \to \wedge^2_R\Omega_R \otimes_R M$ является R-линейным, где

$$\nabla \ : \ \Omega_R \otimes_R M \longrightarrow \wedge^2_R\Omega_R \otimes_R M\,, \qquad \omega \otimes m \longmapsto d\omega \otimes m - \omega \wedge \nabla(m)\,.$$

Упражнение 2.2. Производная Ли

Для $\partial \in D_R$ и $i \geqslant 0$ определим *производную Ли* $L_\partial\colon \wedge^i_R\,\Omega_R \to \wedge^i_R\Omega_R$ по формуле $L_\partial = d\,\iota_\partial + \iota_\partial\, d$, где

$$\iota_\partial \ : \ \wedge^i_R\Omega_R \longrightarrow \wedge^{i-1}_R\Omega_R\,, \qquad \omega \longmapsto \left\{x \mapsto \omega(\partial\wedge x), \quad x \in \wedge^{i-1}_R D_R\right\}, \qquad i \geqslant 1\,,$$

и $\iota_\partial = 0$ при $i = 0$.

(i) Покажите, что L_∂ является дифференцированием алгебры де Рама $\wedge^\bullet_R\Omega_R$, рассматриваемой без градуировки, т.е. что для любых $\omega \in \wedge^i_R\Omega_R$, $\eta \in \wedge^j_R\Omega_R$ выполняется равенство

$$L_\partial(\omega \wedge \eta) = L_\partial(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge L_\partial(\eta)\,,$$

а также покажите, что L_∂ коммутирует с дифференциалом де Рама d.

(ii) Докажите, что для любых элементов $\partial_1, \partial_2 \in D_R$ имеется равенство $L_{[\partial_1,\partial_2]} = [L_{\partial_1}, L_{\partial_2}]$.

(iii) Покажите, что для любых элементов $a \in R$, $\partial \in D_R$ и $\omega \in \wedge^i_R\Omega_R$ выполняется равенство $L_{a\partial}(\omega) = aL_\partial(\omega) + da \wedge \iota_\partial(\omega)$. В частности, это является причиной того, почему производная Ли не задает на $\wedge^i_R\Omega_R$ структуру D_R-модуля.

(iv) Как производная Ли действует на когомологиях де Рама?

Упражнение 2.3. Кольцо дифференциальных операторов U_R

(i) Проверьте, что для любого элемента $a \in R$ имеются вложения $[a, F_i U_R] \subset F_{i-1} U_R$, $i \geqslant 1$, а возникающие отображения $[a, -]$ из $\mathrm{gr}_i^F U_R \simeq \mathrm{Sym}_R^i D_R$ в $\mathrm{gr}_{i-1}^F U_R \simeq \mathrm{Sym}_R^{i-1} D_R$ определяют дифференцирование на кольце $\bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathrm{Sym}_R^i D_R$, естественно задаваемое элементом $da \in \Omega_R$ как вариант ι_∂ для симметрических тензоров.

(ii) Далее будем предполагать, что R не содержит $\mathbb{Z}$-кручения, и что $d(R) \cdot R = \Omega_R$ (например, $R = K$ является полем нулевой характеристики и отображение $\theta_K \colon D_K \to \mathrm{Der}(K)$ инъективно, ср. с доказательством существования коммутирующего базиса). Покажите, что централизатор подкольца R в U_R совпадает с R. (Указание: воспользовавшись пунктом (i), а также локализуя кольцо R, сведите задачу к отсутствию однородных многочленов над R положительной степени, для которых все частные производные равны нулю. Для решения последней задачи рассмотрите поле Эйлера $\sum_i x_i \partial_{x_i}$.)

(iii) Покажите, что центр кольца U_R равен R^{D_R}. (Указание: воспользуйтесь пунктом (ii), а также тем, что для любых $a \in R$, $\partial \in D_R$ имеется равенство $[\partial, a] = \partial(a)$ в U_R.)

(iv) Предположим дополнительно, что R содержит поле $\mathbb{Q}$. Докажите, что любой двусторонний идеал $I \subset U_R$ имеет вид $I = J \cdot U_R$, где J является идеалом в R^{D_R}. В частности, для дифференциального поля (K, D_K) нулевой характеристики с инъективным отображением θ_K кольцо U_K просто. (Указание: рассмотрите идеал I' в $\bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathrm{gr}_i^F U_R \simeq \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathrm{Sym}_R^i D_R$, индуцированный I. Выведите из пункта (i), что I' является дифференциальным Ω_R-идеалом, где мы рассматриваем естественное действие Ω_R дифференцированиями на $\bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathrm{Sym}_R^i D_R$. Локализуя кольцо R, сведите задачу к описанию дифференциальных $\{\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_d}\}$-идеалов в $R[t_1, \ldots, t_d]$. Далее можно применить индукцию по d.)

Упражнение 2.4. Правые U_R-модули

(i) Покажите, что правый U_R-модуль — это то же самое, что R-модуль N с морфизмом колец Ли $\rho \colon D_R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(N)$, для которого выполняется правило Лейбница и для которого $\rho(a\partial) = a\rho(\partial) + \partial(a)$, где $a \in R$, $\partial \in D_R$. (Указание: ρ как выше соответствует структуре правого U_R-модуля на N, заданного формулой $n \cdot \partial = -\rho(\partial)(n)$.)

(ii) Положим $\omega_R = \wedge_R^d \Omega_R$, где d является рангом R-модуля Ω_R. Покажите, что производная Ли (см. упражнение 1.2) задает на ω_R структуру правого U_R-модуля относительно соответствия из пункта (i). (Указание: покажите, что для любых элементов $a \in R$, $\partial \in D_R$ и $\omega \in \omega_R$ выполняется равенство $da \wedge \iota_\partial(\omega) = \partial(a)\omega$, применив дифференцирование ι_∂ к $da \wedge \omega = 0$.)

(iii) Пусть M является гладким компактным ориентируемым вещественным многообразием, $R = C^\infty(M)$, $D_R = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\big(C^\infty(M)\big)$. Тогда между R и ω_R имеется двойственность $\langle a, \omega \rangle = \int_M a\,\omega$. Покажите, что при этой двойственности естественная структура левого U_R-модуля на R соответствует структуре правого U_R-модуля на ω_R, определенной в пункте (ii), т.е. что выполняется равенство $\langle \partial a, \omega \rangle = \langle a, \omega\partial \rangle$.

(iv) Используя описание левых U_R-модулей, как D_R-модулей, а также описание правых U_R-модулей из пункта (i), покажите, что для левого U_R-модуля M и правого U_R-модуля N правило Лейбница для $\rho(\partial)$ задает на $N \otimes_R M$ структуру правого U_R-модуля, а для двух правых U_R-модулей N и N' на $\mathrm{Hom}_R(N, N')$ возникает структура левого U_R-модуля.

(v) Покажите, что имеется эвивалентность между категориями левых и правых U_R-модулей

$$U_R\text{-mod} \xrightarrow{\sim} \text{mod-}U_R\,, \qquad M \longmapsto \omega_R \otimes_R M\,,$$

обратная к которой задается по формуле $N \mapsto \mathrm{Hom}_R(\omega_R, N) \simeq \omega_R^{-1} \otimes_R N$. В явном виде, для $m \in M$, $\omega \in \omega_R$ и $\partial \in D_R$ имеем $(m \otimes \omega) \cdot \partial = -\partial(m) \otimes \omega - m \otimes L_\partial(\omega)$.

Упражнение 2.5. Расширение Атьи

Пусть M является произвольным R-модулем.

(i) Определим *расширение Атьи* по формуле

$$\mathrm{At}_{D_R}(M) := \big\{(\varphi, \partial) \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) \oplus D_R \ \mid \\ \forall a \in R,\, m \in M \ :\ \varphi(am) = \partial(a)m + a\varphi(m)\big\}\,.$$

Покажите, что имеется точная последовательность R-модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{End}_R(M) \longrightarrow \mathrm{At}_{D_R}(M) \longrightarrow D_R\,.$$

Проверьте, что на $\mathrm{At}_{D_R}(M)$ имеется естественная структура кольца Ли, заданая по формуле $[(\varphi, \partial), (\varphi', \partial')] = ([\varphi, \varphi'], [\partial, \partial'])$.

(ii) Докажите, что задать связность на M — это то же самое, что задать сечение R-модулей $D_R \to \mathrm{At}_{D_R}(M)$. При этом связность является плоской, т.е. задает на M структуру D_R-модуля, тогда и только тогда, когда данное сечение является морфизмом колец Ли.

(iii) Предположим, что R-модуль M конечно порожденный и проективный. Покажите, что тогда последовательность из пункта (i) точна и справа, возникает дифференциальное кольцо $\big(R, \mathrm{At}_{D_R}(M)\big)$, а на M имеется каноническая структура дифференциального $\mathrm{At}_{D_R}(M)$-модуля.

Упражнение 2.6. Дифференциальные алгебры Ли

(i) Проверьте, что на ядре $\mathrm{Ker}(\theta_R)$ отображения $\theta_R \colon D_R \to \mathrm{Der}(R)$ имеется структура D_R-модуля, заданная по формуле $\partial(\xi) = [\partial, \xi]$, где $\partial \in D_R$, $\xi \in \mathrm{Ker}(\theta_R)$. Покажите, что $\mathrm{Ker}(\theta_R)$ является *D_R-алгеброй Ли*, т.е. на $\mathrm{Ker}(\theta_R)$ скобка Ли R-линейна и для любых $\partial \in D_R$, $\xi, \xi' \in \mathrm{Ker}(\theta_R)$ имеется равенство $\partial[\xi, \xi'] = [\partial(\xi), \xi'] + [\xi, \partial(\xi')]$.

(ii) Пусть дана D_R-алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и морфизм D_R-алгебр Ли $\alpha \colon \mathrm{Ker}(\theta_R) \to \mathfrak{g}$. Проверьте, что тогда на коядре D'_R отображения

$$\mathrm{Ker}(\theta) \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus D_R\,, \qquad \xi \longmapsto \big(\alpha(\xi), -\xi\big)\,,$$

возникает структура диффереинциального кольца, а также, что имеется морфизм дифференциальных колец $(R, D_R) \to (R, D'_R)$.

Далее $\varphi\colon (R, D_R) \to (S, D_S)$ является морфизмом дифференциальных колец. Напомним, что *дифференциальный модуль-переходник* определяется по формуле

$$U_{R\to S} = \varphi_* U_R = S \otimes_R U_R$$

и является $(U_S - U_R)$-бимодулем.

Упражнение 2.7. Дифференциальный модуль-переходник

Элемент $1 \otimes 1 \in S \otimes_R U_R = U_{R\to S}$ задает морфизм D_S-модулей, или, что то же самое, U_S-модулей $U_S \to U_{R\to S}$. Проверьте, что данный морфизм сохраняет фильтрации $F_\bullet U_S$ и $F_\bullet U_{R\to S} = S \otimes_R F_\bullet U_R$, а индуцированное отображение на присоединенных факторах совпадает с отображением

$$\mathrm{Sym}^i(D_\varphi) \;:\; \mathrm{Sym}^i_S(D_S) \longrightarrow S \otimes_R \mathrm{Sym}^i_R(D_R)\,, \qquad i \geqslant 0\,.$$

(Указание: напомним, что для любых $\partial \in D_S$, $a \in S$, $P \in U_R$ выполняется равенство $\partial(a \otimes P) = \partial(a) \otimes P + a \otimes D_\varphi(\partial)P$.)

Упражнение 2.8. Дифференциально гладкий морфизм

Предположим, что морфизм $\varphi\colon (R, D_R) \to (S, D_S)$ *дифференциально гладкий*, т.е. отображение $D_\varphi\colon D_S \to S \otimes_R D_R$ сюръективно или, что равносильно, отображение $\varphi_*\colon S \otimes_R \Omega_R \to \Omega_S$ инъективно с проективным над S коядром. Возникает дифференциальное кольцо $(S, D_{S/R})$, где $D_{S/R} = \mathrm{Ker}(D_\varphi)$.

(i) Докажите, что морфизм D_S-модулей $U_S \to U_{R\to S}$ из упражнения 2.7 индуцирует изоморфизм D_S-модулей $U_S/(U_S \cdot D_{S/R}) \xrightarrow{\sim} U_{R\to S}$. Также покажите, что имеется канонический изоморфизм D_S-модулей $U_S \otimes_{U_{S/R}} S \simeq U_S/(U_S \cdot D_{S/R})$. (Указание: воспользуйтесь упражнением 2.7.)

(ii) Покажите, что для любого D_S-модуля N имеются канонические изоморфизмы $R^i\varphi^* N \simeq H^i_{D_{S/R}}(N)$, $i \geqslant 0$. В частности, на $H^i_{D_{S/R}}(N)$ имеется каноническая структура D_R-модуля, называемая *связностью Гаусса–Манина*. (Указание: воспользуйтесь пунктом (i) и тем, что для любого D_S-модуля N имеется изоморфизм $\mathrm{Hom}_{D_S}(U_S \otimes_{U_{S/R}} S, N) \simeq \mathrm{Hom}_{D_{S/R}}(S, N)$.)

(iii) Пусть N является D_S-модулем, $\partial \in D_R$ и пусть $\tilde\partial \in D_S$ такой, что $D_\varphi(\tilde\partial) = 1 \otimes \partial \in S \otimes_R D_R$. Покажите, что формула

$$\tilde\partial \;:\; \wedge^i_S \Omega_S \otimes_S N \longrightarrow \wedge^i_S \Omega_S \otimes_S N\,, \qquad \omega \otimes n \longmapsto L_{\tilde\partial}(\omega) \otimes n + (-1)^i \omega \otimes \tilde\partial(n)\,,$$

задает эндоморфизм комплекса $\wedge^\bullet_S \Omega_S \otimes_S N$, сохраняющий подкомплекс $\wedge^\bullet_S \Omega_{S/R} \otimes_S N$. Проверьте, что действие $\tilde\partial$ на когомологиях $H^i_{D_{S/R}}(N)$ не зависит от выбора $\tilde\partial$ при фиксированном ∂. Докажите, что это задает структуру D_R-модуля на $H^i_{D_{S/R}}(N)$.

(iv)* Докажите, что структуры D_R-модуля на $H^i_{D_{S/R}}(N)$ из пунктов (ii) и (iii) совпадают.

(v) Проверьте, что морфизм дифференциальных колец $\pi\colon (\mathbb{Z}, 0) \to (R, D_R)$ из начального объекта $(\mathbb{Z}, 0)$ в категории дифференциальных колец является дифференциально гладким, причем $R\pi^* M \simeq H^i_{D_R}(M)$, $i \geqslant 0$, для любого D_R-модуля M.

(vi) Докажите, что для произвольного морфизма $\varphi\colon (R, D_R) \to (S, D_S)$ и для любого D_S-модуля N имеются канонические изоморфизмы $H^i_{D_S}(N) \simeq H^i_{D_R}(R\varphi^* N)$, $i \geqslant 0$. (Указание: воспользуйтесь пунктом (v) и рассмотрите композицию производных обратных образов дифференциальных модулей.)

Упражнение 2.9. Дифференциально замкнутое вложение

Предположим, что морфизм $\varphi\colon (R, D_R) \to (S, D_S)$ соответствует “дифференциально замкнутому вложению”, т.е. отображение $D_\varphi\colon D_S \to S \otimes_R D_R$ инъективно с проективным над S коядром или, что равносильно, отображение $\varphi_*\colon S \otimes_R \Omega_R \to \Omega_S$ сюрьективно. Возникает конечно порожденный проективный S-модуль $N_{R/S} = \mathrm{Coker}(D_\varphi)$.

(i) Напомним, что на кольце $U_{R\to S}$ имеется фильтрация S-подмодулями $F_\bullet U_{R\to S} = S \otimes_R F_\bullet U_R$. Рассмотрим на $U_{R\to S}$ фильтрацию U_S-подмодулями $G_i\, U_{R\to S} = U_S \cdot F_i\, U_{R\to S}$, $i \geqslant 0$. Докажите, что естественные морфизмы U_S-модулей

$$U_S \otimes_S \mathrm{gr}^F_i U_{R\to S} \longrightarrow \mathrm{gr}^G_i U_{R\to S}\,, \qquad i \geqslant 0\,,$$

с учетом изоморфизмов $\mathrm{gr}_i^F U_{R\to S} \simeq \mathrm{Sym}_S^i(S\otimes_R D_R)$ индуцируют изоморфизмы U_S-модулей

$$U_S \otimes_S \mathrm{Sym}_S^i N_{R/S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_i^G U_{R\to S}\,, \qquad i \geqslant 0\,.$$

(Указание: локализуя кольца R и S, воспользуйтесь явным видом колец U_R и U_S для случая, когда D_R, D_S и $N_{R/S}$ свободные модули.)

(ii) Докажите, что для любого D_S-модуля N имеем $R^j\varphi^*N = 0$ при $j > 0$, а φ^*N является S-модулем и на φ^*N имеется убывающая фильтрация S-подмодулями $G^i\varphi^*N$, $i \geqslant 0$, для которой имеются изоморфизмы $\mathrm{gr}_G^i\,\varphi^*N \simeq \mathrm{Hom}_S\big(\mathrm{Sym}_S^i(N_{R/S}), N\big)$, $i \geqslant 0$. (Указание: $U_{R\to S}$ является проективным фильтрованным U_S-модулем по пункту (i).)

(iii) Пусть k является полем, $R = k[t] \to S = k = k[t]/(t)$, $D_R = R\cdot\partial_t$, $D_S = 0$. Покажите, что тогда имеется изоморфизм $\varphi^*k \simeq \prod\limits_{i\geqslant 0} k\cdot dt^i$, $dt^i \in \mathrm{Sym}_R^i D_R$, где $dt \in \Omega_R$ — двойственный элемент к $\partial_t \in D_R$. При этом выполняются формулы

$$\cdot t \ :\ dt^i \longmapsto i\,dt^{i+1}\,, \qquad \partial_t \ :\ dt^i \longmapsto dt^{i-1}\,.$$

В частности, $k\cdot dt^i$ является собственным подпространством в φ^*k относительно оператора $t\partial_t$ с собственным значением i.

Далее k обозначает произвольное поле нулевой характеристики.

Упражнение 2.10. Когомологии де Рама для локальной кривой
Положим $R = k[[t]]$, $K = k((t))$, и пусть $\mathfrak{m} = (t) \subset R$ обозначает максимальный идеал. Положим $D_R = k[[t]]\partial_t$, $D_K = k((t))\partial_t$. При этом $\Omega_R = k[[t]]dt$, $\Omega_K = k((t))dt$.

(i) Проверьте, что $\mathrm{Pic}^{D_R}(R) = 0$ и что имеется изоморфизм

$$\mathrm{Pic}^{D_K}(K) \simeq k((t))dt/\big(\mathbb{Z}\,t^{-1} + k[[t]]\big)dt\,.$$

(ii) Пусть далее M является D_R-модулем, конечно порожденным над R. Покажите, что тогда естественное k-линейное отображение $M \to M/\mathfrak{m}M$ индуцирует изоморфизм $H^0_{D_R}(M) \simeq M/\mathfrak{m}M$, и что $H^1_{D_R}(M) = 0$.

(iii) Докажите, что комплекс де Рама $\wedge_K^\bullet \Omega_K \otimes_R M$ для D_K-модуля M_K квазиизоморфен подкомплексу

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{m}^{-1}\Omega_R \otimes_R M \longrightarrow 0\,.$$

Выведите из этого, что имеются канонические изоморфизмы $H^0_{D_K}(M_K) \simeq M/\mathfrak{m}M$ и $H^1_{D_K}(M_K) \simeq M/\mathfrak{m}M$, где второй изоморфизм индуцирован k-линейным отображением $\mathrm{res}\colon \mathfrak{m}^{-1}\Omega_R \otimes_R M \to M/\mathfrak{m}M$. (Указание: воспользуйтесь тем, что D_R-модуль M тривиален, а также ацикличностью комплекса $K/R \xrightarrow{d} \Omega_K/\mathfrak{m}^{-1}\Omega_R$.)

Упражнение 2.11. Когомологии де Рама для глобальной кривой Пусть X — гладкая неприводимая аффинная кривая над k. Положим $R = \mathcal{O}(X)$ и пусть $K = k(X)$ — поле частных кольца R. Для произвольной замкнутой точки $x \in X$ обозначим через $\mathfrak{m}_x \subset R$ соответствующий максимальный идеал. Положим $D_R = \mathrm{Der}_k(R)$ и $D_K = K \otimes_R D_R = \mathrm{Der}_k(K)$.

(i) Пусть M является D_R-модулем, конечно порожденным над R. Докажите, что комплекс де Рама $\Omega_K^\bullet \otimes_R M$ для D_K-модуля M_K квазиизоморфен логарифмическому подкомплексу

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \Omega_{K,\log} \otimes_R M \longrightarrow 0\,,$$

где $\Omega_{K,\log}$ обозначает R-подмодуль в Ω_K, состоящий из рациональных 1-форм на X с полюсами не выше первого порядка. (Указание: покажите, что фактор комплекса де Рама по логарифмическому подкомплексу изоморфен прямой сумме по всем $x \in X$ аналогичных факторкомплексов, построенных для пополнения $\widehat{R}_x$ кольца R по $\mathfrak{m}_x$ и для $M_x = \widehat{R}_x \otimes_R M$. Далее воспользуйтесь упражнением 2.10(iii).)

(ii) Покажите, что имеются изоморфизм $H^0_{D_R}(M) \simeq H^0_{D_K}(M_K)$ и точная последовательность

$$0 \longrightarrow H^1_{D_R}(M) \longrightarrow H^1_{D_K}(M_K) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X} M/\mathfrak{m}_x M \longrightarrow 0\,.$$

(iii) Приведите пример одномерного нетривиального D_K-модуля N, для которого $H^1_{D_K}(N) \neq 0$. (Указание: воспользуйтесь пунктом (ii), а также упражнением 2.10(i) для того, чтобы задать нетривиальный одномерный D_K-модуль.)

(iv) Покажите, что существует конечномерный D_K-модуль Q, для которого $\mathrm{End}_{D_K}(Q) = k$, но Q не является простым D_K-модулем. (Указание: вспомните интерпретацию первых когомологий де Рама в терминах расширений и воспользуйтесь пунктом (iii).)

Упражнение 2.12. Логарифмические формы и связности

Пусть X — гладкое проективное многообразие над k, и положим $K = k(X)$.

(i) Докажите, что для произвольного дивизора D на X имеется каноническая биекция между множеством логарифмических 1-форм $\omega \in \Omega^1_{K,\log}$, для которых $\mathrm{res}(\omega) = D$, и плоскими связностями ∇ на расслоении $\mathcal{O}_X(D)$, при которой ω соответствует связности $\nabla(s_D) = \omega \otimes s_D$, где s_D является каноническим рациональным сечением расслоения $\mathcal{O}_X(D)$ с дивизором особенностей D. (Указание: покажите, что если D задается локально уравнением $f = 0$, то для связности ∇ на $\mathcal{O}_X(D)$ с $\nabla(s_D) = \omega \otimes s_D$ форма $-\frac{df}{f} + \omega$ должна быть локально регулярной.) В частности, на расслоении $\mathcal{O}_X(D)$ имеется плоская связность тогда и только тогда, когда дивизор D алгебраически тривиален.

(ii) Пусть $\Omega^1_{K,\mathrm{int}}$ обозначает группу, состоящую из всех логарифмических 1-форм $\omega \in \Omega^1_{K,\log}$, для которых дивизор $\mathrm{res}(\omega)$ имеет целые коэффициенты. Покажите, что имеется изоморфизм групп

$$\Omega^1_{K,\mathrm{int}}/d\log(K^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^{D_X}(X)\,, \quad \omega \longmapsto \big(\mathcal{O}_X(D),\, \nabla(s_D) = \omega \otimes s_D\big)\,,$$

где $D = \mathrm{res}(\omega)$, а $\mathrm{Pic}^{D_X}(X)$ обозначает дифференциальную группу Пикара многообразия X, т.е. группу классов изоморфизма линейных расслоений с плоской связностью на X.

Упражнение 2.13. Связность в координатах

Пусть (R, D_R) — произвольное дифференциальное кольцо. Пусть M — D_R-модуль, являющийся свободным R-модулем ранга n. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ в M над R и отождествим M с R-модулем вектор-столбцов длины n так, что e_i соответствует вектор-столбцу с 1 в i-ом месте и нулями в остальных местах. Тогда ∇ соответствует матрице связности $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Omega_R)$ так, что $\nabla(y) = dy - Ay$ для любого $y \in M$, рассматриваемого как вектор-столбец.

(i) Проверьте, что условие $\nabla^2 = 0$ равносильно равенству $dA = A \wedge A$. Предположим, что D_R — свободный R-модуль, и пусть $\partial_1, \ldots, \partial_r$ — базис в D_R над R, а $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — двойственный базис в Ω_R. Пусть $A = \sum\limits_{i=1}^{r} A_i\omega_i$ и для любого $\partial = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i\partial_i \in D_R$ положим $A_\partial = \sum\limits_{i=1}^{r} a_iA_i$. Покажите, что тогда условие $\nabla^2 = 0$ равносильно тому, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant r$ выполняется равенство
$$A_{[\partial_i,\partial_j]} = \partial_i(A_j) - \partial_j(A_i) - [A_i, A_j]\,.$$

(ii) Пусть $e_1', \ldots, e_n'$ — другой базис в M над R. Пусть обратимая матрица $G \in GL_n(R)$ такая, что $(e_1', \ldots, e_n') = (e_1, \ldots, e_n)G$, т.е. $y = Gy'$, где y и y' — вектор-столбцы одного и того же элемента из M, записанного в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $e_1', \ldots, e_n'$, соответственно. Покажите, что тогда для матрицы связности A' в базисе $e_1', \ldots, e_n'$ имеется равенство $A' = G^{-1}AG - G^{-1}dG$.

(iii) Пусть $M^\vee$ — двойственный D_R-модуль, $e_1^\vee, \ldots, e_n^\vee$ — двойственный базис в $M^\vee$ над R. Покажите, что соответствующая матрица связности для $M^\vee$ равна $-A^\top$.

(iv) Пусть $\det(M) = \wedge_R^n M$, $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ — порождающий модуля $\det(M)$ над R. Покажите, что соответствующая матрица связности для $\det(M)$ равна $\mathrm{Tr}(A)$.

Упражнение 2.14. Локализация для дифференциально простых колец

Пусть (R, D_R) — простое дифференциальное кольцо, не содержащее $\mathbb{Z}$-кручения, $K = \mathrm{Frac}(R)$, и пусть $D_K = K \otimes_R D_R$. Покажите, что для любых D_R-модулей M и N, конечно порожденных над R, естественное отображение $\mathrm{Hom}_{D_R}(M,N)\to \mathrm{Hom}_{D_K}(M_K,N_K)$ является биекцией, а также, что любой подфактор в M_K в категории D_K-модулей является расширением скаляров с R на K некоторого подфактора в M в категории D_R-модулей.

Упражнение 2.15. Дифференциальные операторы и дифференциальные модули

Пусть K — поле, $\partial\colon K\to K$ — ненулевое дифференцирование, и положим $D_K=K\cdot\partial$, $k=K^{\partial}=K^{D_K}$. Тогда $U_K=K[\partial]$ является кольцом дифференциальных операторов. Для ненулевого дифференциального оператора $P\in U_K$ пусть $M_P=U_K/U_KP$ обозначает соответствующий конечномерный D_K-модуль размерности $\deg(P)$.

(i) Докажите, что для любых ненулевых $P,P'\in U_K$ имеется канонический изоморфизм между $\mathrm{Hom}_{D_K}(M_P,M_{P'})$ и k-векторным пространством, состоящим из всех $Q\in U_K$, для которых выполняется неравенство $\deg(Q)<\deg(P')$ и существует $Q'\in U_K$ такой, что $PQ=Q'P'$. (Указание: рассмотрите, в какой элемент из $M_{P'}$ переходит класс 1 в $M_P=U_K/U_KP$.)

(ii) Покажите, что для любых ненулевых $P,P'\in U_K$ имеется изоморфизм D_K-модулей $M_P\simeq M_{P'}$ тогда и только тогда, когда $\deg(P)=\deg(P')$ и существуют $Q,Q'\in U_K$, для которых $\deg(Q)<\deg(P')$, $PQ=Q'P'$, и $U_KQ+U_KP'=U_K$, или, что равносильно, не существует $R\in U_K$, $R\notin K$, делящего справа Q и P'. Если данные условия выполняются, то говорят, что P и P' *одного типа*. (Указание: воспользуйтесь пунктом (i), а также запишите условие сюръективности морфизма из M_P в $M_{P'}$, заданного Q.)

(iii) Покажите, что для любого ненулевого $P\in U_K$ имеется биекция между разложениями P в произведение дифференциальных операторов с точностью до умножения на элемент из K^* и подмодулями модуля M_P, при которой разложению $P=QQ'$ соответствует точная последовательность D_K-модулей

$$0\longrightarrow M_Q\xrightarrow{\cdot Q'} M_P\longrightarrow M_{Q'}\longrightarrow 0\,.$$

(Указание: опишите левые идеалы в U_K, содержащие U_KP.)

(iv) Докажите, что в U_K определено разложение на неразложимые множители, однозначное с точностью до операторов одного типа. (Указание: воспользуйтесь алгоритмом Евклида для доказательства существования разложения. Далее примените теорему Жордана–Гельдера в категории конечномерных D_K-модулей и воспользуйтесь пунктами (iii) и (ii).)