Листок 3. Теория Пикара–Вессио

Ниже (K, D_K) обозначает дифференциальное поле нулевой характеристики, $k = K^{D_K}$.

Упражнение 3.1. Дифференциальная группа Галуа $\mathbb{G}_m$

(i) Пусть M — одномерный дифференциальный модуль над (K, D_K). Постройте алгебру Пикара–Вессио и поле Пикара–Вессио для M. (Указание: рассмотрите D_K-алгебру $K[y]$ с $dy = \omega \cdot y$, где связность в M задается по формуле $\nabla = d - \omega$.) Покажите, что соответствующая дифференциальная группа Галуа изоморфна μ_n или $\mathbb{G}_m$ в зависимости от конечности порядка класса M в группе $\mathrm{Pic}^{D_K}(K)$.

(ii) Докажите, что если класс M имеет бесконечный порядок в группе $\mathrm{Pic}^{D_K}(K)$, то все алгебры (и поля) Пикара–Вессио для M изоморфны. (Указание: воспользуйтесь описанием морфизмов между алгебрами Пикара–Вессио, а также тем, как устроены торсоры над $\mathbb{G}_m$.)

(iii) Пусть $K \subset L$ — расширение Пикара–Вессио, для котого существует вложение $G \subset \mathbb{G}_m$ дифференциальной группы Галуа G. Покажите, что тогда L является полем Пикара–Вессио для некоторого одномерного дифференциального модуля над (K, D_K). (Указание: воспользуйтесь эквивалентностью между категорией дифференциальных модулей и категорий представлений дифференциальной группы Галуа, а также рассмотрите естественное точное представление группы $\mathbb{G}_m$.)

Упражнение 3.2. Дифференциальная группа Галуа $\mathbb{G}_a$

(i) Пусть дана точная последовательность дифференциальных модулей над (K, D_K)

$$0 \longrightarrow \mathbb{1} \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{1} \longrightarrow 0\,.$$

Постройте алгебру Пикара–Вессио и поле Пикара–Вессио для M. (Указание: рассмотрите D_K-алгебру $K[y]$ с $dy = \omega$, где связность в M задается по формуле $\nabla = d - \left(\begin{smallmatrix} 0 & \omega \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.) Покажите, что соответствующая дифференциальная группа Галуа либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{G}_a$ в зависимости от существования расщепления для указанного выше расширения.

(ii) Докажите, что все алгебры (и поля) Пикара–Вессио для M изоморфны. (Указание: воспользуйтесь описанием морфизмов между алгебрами Пикара–Вессио, а также тем, как устроены торсоры над $\mathbb{G}_a$.)

(iii) Пусть $K \subset L$ — расширение Пикара–Вессио с дифференциальной группой Галуа $\mathbb{G}_a$. Покажите, что тогда L является полем Пикара–Вессио для некоторого дифференциального модуля M как выше. (Указание: воспользуйтесь эквивалентностью между категорией дифференциальных модулей и категорией представлений дифференциальной группы Галуа, а также рассмотрите естественное точное представление группы $\mathbb{G}_a$.)

Упражнение 3.3. Дифференциальная группа Галуа представления алгебры Ли

Предположим, что отображение $\theta_K \colon D_K \to \mathrm{Der}(K)$ равно нулю, т.е. что выполняется равенство $k = K$. Пусть M является представлением алгебры Ли D_K над K, т.е. задан морфизм алгебр Ли $\rho\colon D_K \to \mathfrak{gl}(M)$ над K. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(M)$ — наименьшая алгебраическая подгруппа, для которой $\mathrm{Lie}(G) \supset \mathrm{Im}(\rho)$. В частности, G связна.

(o) Рассмотрим действие кольца Ли D_K на $\mathcal{O}(G)$ дифференцированиями через композицию

$$D_K \xrightarrow{\rho} \mathrm{Im}(\rho) \hookrightarrow \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Der}_K\big(\mathcal{O}(G)\big)\,.$$

Проверьте, что это задает структуру D_K-алгебры на $\mathcal{O}(G)$.

(i) Докажите, что $D_{\mathcal{O}(G)}$-модуль $M_{\mathcal{O}(G)}$ тривиален. (Указание: пусть $y_{ij} \in \mathcal{O}(G)$ — матричные элементы представления $G \subset \mathrm{GL}(M)$ относительно некоторого базиса в M над K. Докажите, что тогда для любого $\partial \in D_K$ выполняется матричное равенство $\partial(y_{ij}) = \rho(\partial)\cdot(y_{ij})$.)

(ii) Докажите, что если $A \subset \mathcal{O}(G)$ является D_K-подалгеброй, для которой D_A-модуль M_A тривиален, то $A = \mathcal{O}(G)$. (Указание: используя замкнутое вложение $G \subset \mathrm{GL}(M)$, покажите что K-алгебра $\mathcal{O}(G)$ порождается элементами y_{ij} и $\det(y_{ij})^{-1}$.)

(iii) Покажите, что выполняется равенство $K = \mathcal{O}(G)^{D_K}$. (Указание: воспользуйтесь тем, что $\mathcal{O}(G) = \bigcup U_i$, где U_i — конечномерные представления группы G, и тем, что для произвольного конечномерного представления U группы G и элемента $u \in U$ имеется равенство

$$\mathrm{Lie}\big(\mathrm{Stab}_G(u)\big) = \{x \in \mathrm{Lie}(G) \ \mid \ xu = 0\}\,.$$

Последнее следует из того, что аналогичное равенство имеет место для $\mathrm{GL}(U)$ вместо G. Также вспомните, как выглядят функции на G, инвариантные относительно сдвигов.)

(iv) Покажите, что $\mathcal{O}(G)$ является D_K-простой алгеброй. (Указание: для произвольного D_K-идеала $I \subset \mathcal{O}(G)$ рассмотрите его пересечения $I \cap U_i$, а также воспользуйтесь тем, что для произвольного конечномерного представления U группы G и подпространства $W \subset U$ выполняется равенство

$$\mathrm{Lie}\big(\mathrm{Stab}_G(W)\big) = \{x \in \mathrm{Lie}(G) \ \mid \ xW \subset W\}\,.$$

Последнее следует из того, что аналогичное равенство имеет место для $\mathrm{GL}(U)$ вместо G. Также вспомните, какими могут быть замкнутые подмногообразия в G, инвариантные относительно сдвигов.)

(v) Покажите, что $\mathcal{O}(G)$ является алгеброй Пикара–Вессио для M над (K, D_K). Выведите из этого, что для произвольной алгебраической группы G над k существует дифференциальное поле (K, D_K) с $K^{D_K} = k$ и расширение Пикара–Вессио $K \subset L$, для которого дифференциальная группа Галуа изоморфна G. (Указание: положите $K = k$ с нулевым отображением θ_K.)

Упражнение 3.4. Конечные групповые схемы как дифференциальные группы Галуа

(i) Покажите, что для произвольного расширения Пикара–Вессио $K \subset L$ его степень конечна тогда и только тогда, когда соответствующая дифференциальная группа Галуа G является конечной групповой схемой над k. (Указание: воспользуйтесь тем, что для алгебры Пикара–Вессио $A \subset L$ связное многообразие $\mathrm{Spec}(A)$ является G_K-торсором.)

(ii) Докажите, что конечное расширение полей $K \subset L$ является расширением Пикара–Вессио тогда и только тогда, когда $L = \mathcal{O}(T)$, где T является G_K-торсором над K, связным над полем $K_{\bar{k}} = \mathrm{Frac}(K \otimes_k \bar{k})$, а G — некоторая конечная групповая схема над полем k. При этом L является алгеброй и полем Пикара–Вессио для самого L, рассматриваемого как D_K-модуль относительно единственного возможного продолжения дифференцирований с K на L. (Указание: связность торсора над $K_{\bar{k}}$ влечет, что поле k алгебраически замкнуто в $L = \mathcal{O}(T)$. Выведите из этого, что $k = L^{D_K}$. Покажите, что естественный изоморфизм $L \otimes_K L \simeq L \otimes_k \mathcal{O}(G)$ является D_K-изоморфизмом, где D_K действует тривиально на $\mathcal{O}(G)$. Для этого сначала покажите, что кодействие $L \to L \otimes_k \mathcal{O}(G)$ является морфизмом D_K-алгебр. В свою очередь, для этого используйте, что для любой k-алгебры R группа $G(R)$ действует D_K-автоморфизмами на $L \otimes_k R$ над $K \otimes_k R$.)

(iii) Покажите, что, в частности, если $K \subset L$ является конечным расширением Галуа с группой Галуа Γ, то L является расширением Пикара–Вессио для него самого с дифференциальной группой Галуа $\Gamma \times \mathrm{Spec}(k)$.

Упражнение 3.5. Дифференциальная группа Галуа SO_2

Предположим, что $k = \mathbb{R}$. Определена алгебраическая группа SO_2 над $\mathbb{R}$ (окружность).

(i) Пусть $K \subset L$ — расширение Пикара–Вессио, для котого существует вложение $G \subset \mathrm{SO}_2$ дифференциальной группы Галуа G. Покажите, что тогда L является полем Пикара–Вессио для двумерного D_K-модуля M, являющегося ограничением скаляров с $K_{\mathbb{C}} = K \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ на K некоторого одномерного дифференциального модуля N над $(K_{\mathbb{C}}, D_{K_{\mathbb{C}}})$, на котором связность задана по формуле $d - (\omega + i\eta)$, где $2\omega \in d\log(K^*)$. (Указание: для естественного двумерного точного представления V группы SO_2 над $\mathbb{R}$ имеем $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C}$. Выведите из этого, что L является полем Пикара–Вессио для некоторого двумерного модуля M с $\mathbb{C} \subset \mathrm{End}_{D_K}(M)$, и поэтому M является ограничением скаляров модуля N как указано выше. Далее воспользуйтесь тем, что $\det(M)$ является тривиальным D_K-модулем, поскольку $\det(V)$ является тривиальным представлением группы SO_2.)

(ii) Приведите пример поля K с $k = \mathbb{R}$ и расширения Пикара–Вессио $K \subset L$ как в пункте (i). (Указание: вспомните про функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$.) Отметим, что, тем не менее, не для всех полей K и дифференциальных модулей M как в пункте (i) существует поле Пикара–Вессио.

Упражнение 3.6. Дифференциальная группа Галуа U_3

Напомним, что группа Гейзенберга U_3 — это группа верхнетреугольных матриц порядка 3 с единицами на диагонали.

(i) Пусть M — дифференциальный модуль, для которого существует фильтрация $M \supset N \supset R$, где $M/N \simeq N/R \simeq R \simeq \mathbb{1}$. Докажите, что тогда для M существует поле Пикара–Вессио, причем соответствующая дифференциальная группа Галуа G вложена в U_3. (Указание: для доказательства существования поля Пикара–Вессио решите соответствующее дифференциальное уравнение, последовательно присоединяя интегралы замкнутых форм как в упражнении 3.2(i).)

(ii) Покажите, в явном виде связность на модуле M из пункта (i) задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega & \xi \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $\omega, \eta, \xi \in \Omega_K$, $d\omega = d\eta = 0$, $\omega \wedge \eta = d\xi$.

(iii) Докажите, что если классы $[\omega], [\eta] \in H^1_{D_K}(K)$ порождают двумерное пространство над k, то $G = \mathrm{U}_3$. (Указание: воспользуйтесь тем, что $k[\omega] = k[\eta] \subset H^1_{D_K}(K)$ тогда и только тогда, когда совпадают соответствующие расширения Пикара–Вессио, а также тем, что если подгруппа в U_3 сюръективно отображается на $\mathrm{U}_3/[\mathrm{U}_3, \mathrm{U}_3]$, то она совпадает с U_3.)

(iv) Опишите возможные дифференциальные группы Галуа $G \subset \mathrm{U}_3$ в зависимости от ω, η, ξ для случаев, при которых $k[\omega] = k[\eta]$.

Упражнение 3.7. Дифференциальные модули ранга два

Пусть M является дифференциальным модулем над (K, D_K), для которого $\dim_K(M) = 2$.

(i) Докажите, что имеется каноническая биекция между множеством одномерных подмодулей $N \subset M$ и множеством $\mathbb{P}(M)(K, D_K)$, состоящим из D_K-точек на $\mathbb{P}(M)$, т.е. множеством однородных D_K-идеалов в градуированной D_K-алгебре $\mathrm{Sym}_K^\bullet(M^\vee)$, порожденных своей компонентой степени 1. (Указание: как и в обычном случае проективной прямой, сопоставьте одномерному D_K-подмодулю $N \subset M$ ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{Sym}_K^\bullet(M^\vee) \to \mathrm{Sym}_K^\bullet(N^\vee)$.)

(ii) Покажите, что

$$\mathbb{P}(M)(K, D_K) = \mathrm{Hom}_{D_K}(B_1, K) \cup \mathrm{Hom}_{D_K}(B_2, K)\,,$$

где D_K-алгебры B_i являются компонентами степени нуль в локализациях $\mathrm{Sym}_K^\bullet(M^\vee)[y_i^{-1}]$, $i = 1, 2$, а y_1, y_2 — базис в $M^\vee$ над K.

(iii) Пусть в базисе, двойственном к y_1, y_2, связность в M задается по формуле $d - \left(\begin{smallmatrix}\omega_{11} & \omega_{12}\\ \omega_{21} & \omega_{22}\end{smallmatrix}\right)$. Покажите, что тогда $B_1 \simeq K[u]$, где

$$du = \omega_{21} + (\omega_{22} - \omega_{11})u - \omega_{12}u^2\,.$$

Данное нелинейное дифференциальное уравнение на u называется *уравнением Риккати.* (Указание: продифференцируйте y_2/y_1.) Под *множеством решений уравнения Риккати* в K будет понимать множество, состоящее из $a \in K$, для которых выполняется уравнение Риккати, объединенное с одноточечным множеством в случае, когда $\omega_{12} = 0$. Таким образом, множество $\mathbb{P}(M)(K, D_K)$ биективно множеству решений уравнения Риккати в K.

(iv) Далее предположим, что для M существует поле Пикара–Вессио L, и пусть G — соответствующая дифференциальная группа Галуа. Обозначим через $B \subset \mathrm{GL}_2$ подгруппу, состоящую из верхнетреугольных матриц. Покажите, что $G \subset \mathrm{GL}_2$ сопряжена подгруппе в B тогда и только тогда, когда уравнение Риккати имеет хотя бы одно решение в K. (Указание: покажите, что множество решений уравнения Риккати $\mathbb{P}(M)(K, D_K)$ находится также в биекции с G-инвариантными точками на $\mathbb{P}(V)$, где $V = (M_L)^{D_K}$.)

(v) Обозначим через $T \subset \mathrm{GL}_2$ подгруппу, состоящую из диагональных матриц. Покажите, что $G \subset \mathrm{GL}_2$ сопряжена подгруппе в T тогда и только тогда, когда уравнение Риккати имеет хотя бы два решения в K. Покажите, что G является подгруппой в группе скалярных матриц $\mathbb{G}_m \subset \mathrm{GL}_2$ тогда и только тогда, когда уравнение Риккати имеет хотя бы три решения в K, причем в этом случае оно имеет бесконечно много решений; опишите их.

(vi) Обозначим через $\widetilde{B} \subset \mathrm{GL}_2$ подгруппу, порожденную верхнетреугольными матрицами и матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Покажите, что $G \subset \mathrm{GL}_2$ сопряжена подгруппе в $\widetilde{B}$ и не сопряжена подгруппе в B тогда и только тогда, когда уравнение Риккати не имеет решений в K и имеет решение в некотором квадратичном расширении $K \subset E$, для которого поле k алгебраически замкнуто в поле E. Докажите, что при этом существует вложение D_K-полей $E \subset L$, образ которого соответствует по дифференциальной теории Галуа сюръективному гомоморфизму
$$G \longrightarrow \widetilde{B} \longrightarrow \widetilde{B}/B \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$
(Указание: для доказательства существования вложения $E \subset L$ предположите обратное. Выведите из этого, что $F = L \otimes_K E$ является полем Пикара–Вессио для M_E над E, проверив явно, что $k = F^{D_K}$. При этом дифференциальная группа Галуа $G_{F/E}$ поля F над E совпадает с G как подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$, где $V = (M_L)^{D_K} = (M_F)^{D_K}$. Это противоречит с пунктом (iii).)

Упражнение 3.8. Теорема Лиувилля

Пусть $D_K = K \cdot \partial$, где ∂ является ненулевым дифференцированием поля K. Положим $M = U_K/U_K P$, где $P = \partial^2 + a\partial + b$, $a, b \in K$.

(i) Покажите, что уравнение Риккати, соответствующее M, имеет вид $\partial u = -b - au - u^2$, причем при рассмотрении множества его решений можно исключить одноточечное множество, соответствующее условию $\omega_{12} = 0$ как выше. (Указание: вспомните, как выглядит матрица связности модуля M.)

(ii) Предположим, что существует поле Пикара–Вессио для M, и пусть G обозначает соответствующую дифференциальную группу Галуа. Предположим также, что уравнение $\partial v = -av$ имеет решение в K, что уравнение Риккати не имеет решения в K, и что G связна над $\bar{k}$ (последнее условие не зависит от выбора поля Пикара–Вессио для M). Покажите, что тогда имеется изоморфизм $G \simeq \mathrm{SL}_2$. (Указание: найдите $\det(M)$ в терминах a, b, а также воспользуйтесь упражнением 3.7(iii) и классификацией алгебраических подгрупп в SL_2 в зависимости от наличия инвариантных точек на $\mathbb{P}^1$.)

(iii) Далее будем считать, что $K = \mathbb{C}(t)$, $\partial = \partial_t$, а a, b являются многочленами из $\mathbb{C}[t]$. Покажите, что тогда группа G над $\mathbb{C}$ связна. (Указание: воспользуйтесь односвязностью комплексной плоскости.)

(iv) Пусть $a = 0$, а b имеет нечетную степень. Покажите, что тогда имеется изоморфизм $G \simeq \mathrm{SL}_2$. (Указание: рассмотрите разложение в ряд Лорана на бесконечности $\mathbb{C}(t) \subset \mathbb{C}((s))$, где $t = s^{-1}$, $\partial_t = -s^2\partial_s$, для того, чтобы показать, что у уравнения Риккати нет решений в $\mathbb{C}((s))$, и тем более в $\mathbb{C}(t)$.) Выведите из этого, что если голоморфные функции f_1, f_2 являются базисом в пространстве решений уравнения Эйри $\partial^2 f + bf = 0$ в голоморфных функциях, то все алгебраические соотношения на y_1, ∂y_1, y_2, ∂y_2 над $\mathbb{C}(t)$ порождаются соотношением $y_1\partial y_2 - y_2\partial y_1 = 1$.