Задачи к курсу
«Структурная теория доказательств и алгебраическая логика»

МИАН / МФТИ, весна 2021 г., лектор С. Л. Кузнецов

1. Удалим из исчисления Int (интуиционистское исчисление высказываний в гильбертовском формате) все аксиомы, содержащие $\vee$. Будет ли полученный фрагмент $\mathrm{Int}(\to, \wedge, \bot)$ консервативен в Int, т.е. верно ли следующее утверждение: формула, не содержащая $\vee$, доказуема в $\mathrm{Int}(\to, \wedge, \bot)$ тогда и только тогда, когда она доказуема в Int? Тот же вопрос для $\wedge$ и для $\bot$, а также для Cl (классическая логика) вместо Int.

2. Докажите теорему об устранении сечения для Cl_G (классическое исчисление высказываний в генценовском формате).

3. Сработает ли доказательство теоремы Гливенко без устранения сечения, т.е. верно ли следующее: если $\mathrm{Int}_G \vdash \Gamma, {}^{\neg}\Delta, \neg A \Rightarrow \bot$ и $\mathrm{Int}_G \vdash \Phi, A, {}^{\neg}\Theta \Rightarrow \bot$, то $\mathrm{Int}_G \vdash \Gamma, \Phi, {}^{\neg}\Delta, {}^{\neg}\Theta \Rightarrow \bot$?

4. Докажите, что $\mathrm{Int} \vdash \neg A$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Cl} \vdash \neg A$ (для произвольной формулы A).

5. Выполняется ли интерполяционная лемма Линдона (с учётом полярностей) для Cl?

6. (R. Dyckhoff, 1990) Исчисление Int_D получается из Int_G заменой аксиомы $A \Rightarrow A$ на $p_i, \Delta \Rightarrow p_i$, аксиомы $\bot \Rightarrow A$ на $\bot, \Delta \Rightarrow A$, правил $\to L$ и $\wedge L$ на правила

$$\frac{\Gamma, p_i, A \Rightarrow D}{\Gamma, p_i, p_i \to A \Rightarrow D} \to L_1 \qquad \frac{\Gamma, A \to (B \to C) \Rightarrow D}{\Gamma, (A \wedge B) \to C \Rightarrow D} \to L_2 \qquad \frac{\Gamma, A \to C, B \to C \Rightarrow D}{\Gamma, (A \vee B) \to C \Rightarrow D} \to L_3$$

$$\frac{\Gamma, B \to C \Rightarrow A \to B \quad \Gamma, C \Rightarrow D}{\Gamma, (A \to B) \to C \Rightarrow D} \to L_4 \qquad \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C} \wedge L'$$

и удалением структурных правил W и C. (Считаем, что правило сечения уже устранено.) Докажите, что исчисления Int_G и Int_D эквивалентны.

7. (N. Dershowitz, Z. Manna, 1979) Определим вес $wt(A)$ формулы A как число вхождений переменных, константы $\bot$ и связок $\vee$, $\to$, плюс удвоенное число вхождений связки $\wedge$: $wt(p_i) = wt(\bot) = 1$, $wt(A \to B) = wt(A \vee B) = wt(A) + wt(B) + 1$, $wt(A \wedge B) = wt(A) + wt(B) + 2$. Определим на конечных мультимножествах формул строгий частичный порядок $\prec$ следующим образом: $\Gamma \prec \Delta$, если $\Gamma = \Gamma', \Phi$, $\Delta = \Delta', \Phi$, причём Γ' непусто и для каждой $A \in \Gamma'$ найдётся $B \in \Delta'$, такая что $wt(A) < wt(B)$. Докажите, что отношение $\prec$ фундировано, т.е. не существует бесконечной $\prec$-убывающей цепи конечных мультимножеств формул.

8. Положим $(\Gamma \Rightarrow A) \prec (\Delta \Rightarrow B)$, если $(\Gamma, A) \prec (\Delta, B)$. Докажите, что для каждого правила Int_D любая его посылка $\prec$-меньше его заключения.

9. * (A. Pitts, 1992) Пусть Δ — мультимножество формул, B — формула, p — переменная. Докажите, что существуют такие формулы $E_p(\Delta)$ и $A_p(\Delta; B)$, что:

   (a) $\mathrm{Var}(E_p(\Delta)) \subseteq \mathrm{Var}(\Delta) \setminus \{p\}$

   (b) $\mathrm{Var}(A_p(\Delta; B)) \subseteq \mathrm{Var}(\Delta, B) \setminus \{p\}$

   (c) $\mathrm{Int}_D \vdash \Delta \Rightarrow E_p(\Delta)$

   (d) $\mathrm{Int}_D \vdash \Delta, A_p(\Delta; B) \Rightarrow B$

(e) если Γ не содержит p и $\mathrm{Int}_D \vdash \Gamma, \Delta \Rightarrow B$, то $\mathrm{Int}_D \vdash \Gamma, E_p(\Delta) \Rightarrow A_p(\Delta, B)$, и если к тому же $p \notin \mathrm{Var}(B)$, то $\mathrm{Int}_D \vdash \Gamma, E_p(\Delta) \Rightarrow B$.

Подсказка: воспользуйтесь индукцией по $\prec$.

10. Докажите свойство равномерной интерполяции для Int_D: для каждой формулы B существует формула $A_p(B)$, такая что $\mathrm{Var}(A_p(B)) \subseteq \mathrm{Var}(B) \setminus \{p\}$, $\mathrm{Int}_D \vdash A_p(B) \Rightarrow B$, и если $\mathrm{Int}_D \vdash \Gamma \Rightarrow B$ и $p \notin \mathrm{Var}(\Gamma)$, то $\mathrm{Int}_D \vdash \Gamma \Rightarrow A_p(B)$.