

Задачи к курсу
«Структурная теория доказательств и алгебраическая логика»
Часть 2

МИАН / МФТИ, весна 2021 г., лектор С. Л. Кузнецов

1. Существует ли конечная гейтингова алгебра, не являющаяся булевой?
2. Приведите пример недистрибутивной решётки с делениями.
3. Существует ли конечная универсальная алгебра в классе гейтинговых алгебр, т.е. такая алгебра, что в ней общезначимы в точности все теоремы Int?
4. Докажите, что в решётках с делениями выполняются свойства монотонности делений: если $a \preceq b$, то $a/c \preceq b/c$, $c/b \preceq c/a$, $c \setminus a \preceq c \setminus b$ и $b \setminus c \preceq a \setminus c$.
5. Рассмотрим исчисление Ламбека с единицей — фрагмент MALC в языке $\cdot, \setminus, /$, **1**. Выполняется ли для него следующее свойство равномерной интерполяции (существования предынтерполянта): для любой формулы B и множества переменных \mathcal{V} существует формула E , такая что выводима секвенция $E \Rightarrow B$ и для любой формулы A , использующей только переменные из \mathcal{V} , выводимость $A \Rightarrow B$ влечёт выводимость $A \Rightarrow E$?
6. Решётка называется *полной*, если у любого (не обязательно конечного) множества её элементов найдётся точная верхняя грань и точная нижняя грань. Докажите, что на любой полной решётке можно ввести структуру гейтинговой алгебры.
7. Существуют ли а) решётки с делениями; б) гейтинговы алгебры, не являющиеся полными решётками?