Задачи к курсу «λ-исчисление», часть 2
осень 2021 г., лектор С. Л. Кузнецов

7. Рассмотрим следующую алгоритмическую задачу. Даны два λ-терма P и Q. Выяснить, существует ли такой λ-терм R, что $P \to_\beta^* R$ и $Q \to_\beta^* R$. Является ли эта задача алгоритмически разрешимой?

8. Пусть $? = \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)$ и $F = ?????????????????????????????$. Докажите, что F является комбинатором неподвижной точки, т.е. для любого терма X верно $FX =_\beta X(FX)$.

9. Зададим некоторую нумерацию λ-термов натуральными числами, т.е. инъективную функцию $\#\colon \mathbb{N} \to \Lambda$, причём эффективную в следующем смысле: (1) множество $\{\#(M) \mid M \in \Lambda\}$ разрешимо; (2) функции $\#$ и $\#^{-1}$ вычислимы. Докажите следующую *теорему о рекурсии:* для любого λ-терма F существует такой λ-терм Z, что $Z =_\beta F\,\underline{\#(Z)}$. (Через $\underline{n}$ обозначается нумерал Чёрча, соответствующий натуральному числу n. Таким образом, $\underline{\#(Z)}$, как единое целое, — это один λ-терм, причём в нормальной форме.)

10. Докажите аналог теоремы Райса – Успенского для λ-термов: если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — непересекающиеся непустые множества λ-термов, замкнутые относительно $=_\beta$, то не существует разрешимого множества $\mathcal{C}$, для которого $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ и $\mathcal{C} \cap \mathcal{B} = \varnothing$.

11. Существуют ли такие замкнутые (т.е. не имеющие переменных, не связанных λ'ами) термы M и N, что $M \to_\beta^* N$, и при этом **а)** N типизуем в $\lambda_\to$ (по Карри), а M — нет? **б)** оба терма типизуемы, но существует такой тип α, что $\vdash N : \alpha$ и $\neg \vdash M : \alpha$?

12. Постройте замкнутый терм P, для которого $\vdash P : ((((r \to s) \to r) \to r) \to s) \to s$.