ЛЕКЦИЯ 1

Введение

Этот спецкурс посвящен одному из интереснейших и интенсивно развивающихся разделов физики твердого тела — теории топологических диэлектриков.

Почему мы выбрали именно эту тему для нашего спецкурса? Помимо ее значимости для теоретической физики нас привлекли многочисленные связи этой науки с различными разделами современной математики. К таким разделам можно отнести топологию (в особенности, теорию гомотопий), теорию клиффордовых алгебр, K-теорию и некоммутативную геометрию.

Роль топологии в теории твердого тела проявилась, по-видимому впервые, при исследовании квантового эффекта Холла. Вскоре после его открытия фон Клитцингом в 1980 году появились работы Лафлина [18] и Таулесса с соавторами [25], предложившие топологическое объяснение этого эффекта. (Подробнее об этом см. обзор [23].)

С физической точки зрения топологическая инвариантность эквивалентна адиабатической устойчивости. Топологические диэлектрики характеризуются наличием энергетической щели, устойчивой к малым деформациям, что и служит основанием для использования топологических методов при их изучении.

Ключевую роль при исследовании топологических объектов в теории твердого тела играют их группы симметрий. Эти группы будут подробно рассмотрены в курсе, здесь отметим только, что имеются три основных типа таких симметрий. Это симметрия относительно обращения времени (которой мы уделяем особое внимание), симметрия сохранения числа частиц (или зарядовая симметрия) и PH-симметрия (симметрия между частицами и дырками). Исходя из описания возможных групп симметрий, Китаев [17] предложил классификацию топологических диэлектриков и сверхпроводников, которую мы также подробно рассмотрим в нашем курсе.

1. Теория Блоха

1.1. **Одночастичный оператор Шредингера.** Теория Блоха (см. [2], [20]) описывает свойства твердых тел, обладающих кристаллической решеткой, называемой *решеткой Браве*. С математической точки зрения это дискретная абелева группа Γ в пространстве $\mathbb{R}^d$ с $d = 2$ или $d = 3$, изоморфная $\mathbb{Z}^d$. Группа Γ действует на $\mathbb{R}^d$ трансляциями T_γ на векторы $\gamma \in \Gamma$.

Поведение свободных электронов в твердом теле определяется *одночастичным уравнением Шредингера*

$$H\psi := (-\Delta + V)\psi = E\psi \tag{1}$$

с потенциалом V, периодическим относительно действия Γ. В дальнейшем предполагается, что V есть ограниченная измеримая функция. Введенный оператор H коммутирует со всеми операторами T_γ.

Обозначим через Γ' двойственную решетку в импульсном пространстве $(\mathbb{R}^d)'$, которая определяется следующим образом:

$$\Gamma' = \{k \in (\mathbb{R}^d)' : k \cdot \gamma \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{для любых } \gamma \in \Gamma\}.$$

Фундаментальная область (единичная клетка) $M_{\Gamma'}$ решетки Γ' называется *зоной Бриллюэна* Br_d.

Функции, инвариантные относительно Γ, можно рассматривать как функции на торе $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}/\Gamma$. Обозначим через $\mathcal{H}_0$ гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{T}^d) = L^2(\mathbb{R}^d/\Gamma) \tag{2}$$

относительно меры на $\mathbb{R}^d/\Gamma$, индуцированной лебеговой мерой dx на $\mathbb{R}^d$. Экспонента $e_k := e^{ik\cdot x}$ принадлежит $\mathcal{H}_0$, если $k \in \Gamma'$. Более того, такие функции образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_0$.

Гладкие функции вида

$$\psi(x) = e^{ik\cdot x}\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

с вектором k, принадлежащим зоне Бриллюэна Br_d, и функцией $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d/\Gamma)$, называются *блоховскими*, а вектор k – *квазиимпульсом*. Пространство блоховских функций с квазиимпульсом k обозначается через L_k. Эквивалентно, можно определить пространство L_k блоховских функций как

$$L_k = \{\psi | in C^\infty(\mathbb{R}^d) :\ \psi \circ T_\gamma = e^{ik\cdot\gamma}\psi \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Оператор Шредингера (1) действует на блоховские функции по правилу

$$H\left(e^{ik\cdot x}\varphi(x)\right) = e^{ik\cdot x} H_k\varphi(x). \tag{3}$$

Оператор H_k, называемый *эффективным* или *блоховским гамильтонианом*, имеет вид

$$H_k\varphi = (\frac{1}{i}\nabla + k)^2\varphi + V\varphi.$$

Он отображает пространство $C^\infty(\mathbb{R}^d/\Gamma)$ в себя, поэтому из формулы (3) следует, что исходный оператор Шредингера $H = H_0$ отображает пространство блоховских функций с квазиимпульсом k в себя. Если обозначить через I_k оператор умножения на $e^{ik\cdot x}$, то формулу (3) можно будет переписать в виде

$$I_k^{-1} H I_k = H_k$$

откуда

$$H|_{L_k} = I_k \circ H_k|_{L_0} \circ I_k^{-1},$$

так что исследование оператора $H|_{L_k}$ сводится к изучению оператора $H_k|_{L_0}$. Обозначим через $H(k)$ замыкание оператора $H_k|_{L_0}$ в пространстве $\mathcal{H}_0$. Область определения этого оператора совпадает с подпространством

$$D = \left\{\varphi : \varphi(x) = \sum_{\gamma'\in\Gamma'} \varphi_{\gamma'} e^{i(\gamma'\cdot x)},\ \sum_{\gamma'\in\Gamma'} (1 + |\gamma'|^2)^2 |\varphi_{\gamma'}|^2 < \infty\right\}.$$

Это подпространство можно отождествить с соболевским пространством $H^2(\mathbb{R}^d/\Gamma)$ и задать скалярное произведение на нем посредством

$$\|\varphi\|_2^2 = V_\Gamma \sum_{\gamma'\in\Gamma'} (1 + |\gamma'|^2)^2 |\varphi_{\gamma'}|^2,$$

где V_Γ есть объем фундаментальной области M_Γ решетки Γ.

Спектр оператора $H(k)$ является дискретным, а собственные функции $\varphi_m(k)$ этого оператора, являющиеся решениями уравнения

$$H(k)\varphi_m(k) = E_m(k)\varphi_m(k), \tag{4}$$

образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$. Доказательства этих утверждений можно найти в книге [7] (лемма 5.2).

Совокупность всех электронных уровней, отвечающих функции $E_m(k)$ с фиксированным m, называется *энергетической зоной*. Таким образом, собственные функции $E_m(k)$ определяют *зонную структуру* твердого тела.

Основное состояние системы из n блоховских электронов имеет следующую структуру. Имеется некоторое число p полностью заполненных одно-электронных уровней с энергией, не превосходящей величины E_F, называемой *энергией Ферми*. Выше лежат $n-p$ пустых (не заполненных) уровней. Зазор между верхним заполненным и нижним пустым уровнем называется *энергетической щелью* или *запрещенной зоной*. Твердые тела, обладающие широкой энергетической щелью, устойчивой относительно малых деформаций, называются *диэлектриками* или *изоляторами*.

Блоховские функции

$$\psi_{m,k}(x) = e^{ik\cdot x}\varphi_{m,k}(x), \tag{5}$$

являются собственными функциями исходного оператора Шредингера H.

Построим ортогональное разложение исходного пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ по блоховским функциям. Обозначим через $\tilde{f}$ преобразование Фурье функции $f \in S(\mathbb{R}^d)$, где $S(\mathbb{R}^d)$ – пространство Шварца быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx,$$

так что

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{(\mathbb{R}^d)'} e^{i\xi\cdot x} \tilde{f}(\xi)d\xi.$$

Разложим интеграл в правой части по клеткам, являющимся сдвигами зоны Бриллюэна:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} \int_{\gamma'+\mathrm{Br}_d} e^{i\xi\cdot x}\tilde{f}(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} \int_{\mathrm{Br}_d} e^{i(k+\gamma')\cdot x}\tilde{f}(k+\gamma')dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathrm{Br}_d} \left[\sum_{\gamma'\in\Gamma'} e^{i(k+\gamma')\cdot x}\tilde{f}(k+\gamma')\right] dk.$$

Введем функцию

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} e^{i(k+\gamma')\cdot x}\tilde{f}(k+\gamma').$$

Она принадлежит L_k и

$$f(x) = \int_{\mathrm{Br}_d} f_k(x)dk.$$

Полученное разложение в интеграл по блоховским функциям является ортогональным, т.е. выполняется равенство Парсеваля. Действительно

$$
(6)\quad \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int_{(\mathbb{R}^d)'} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{\gamma'\in\Gamma'} \int_{\mathrm{Br}_d} |\tilde{f}(k+\gamma')|^2 dk =
$$

$$
= \int_{\mathrm{Br}_d} \left[\sum_{\gamma'\in\Gamma'} |\tilde{f}(k+\gamma')|^2 \right] dk.
$$

Заметим, что функции $\{V_\Gamma^{-1/2} e^{i\gamma'\cdot x}\}_{\gamma'\in\Gamma'}$, где V_Γ есть объем M_Γ, образуют полную ортонормированную систему на $M_\Gamma = \mathbb{R}^d/\Gamma$.

Применяя формулу Парсеваля к ортогональному разложению

$$
e^{-ik\cdot x} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} e^{i\gamma'\cdot x} \tilde{f}(k+\gamma'),
$$

получим

$$
(7)\quad \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} |\tilde{f}(k+\gamma')|^2 = \frac{1}{V_\Gamma} \int_{M_\Gamma} |f_k(x)|^2 dx.
$$

Подставляя это выражение в формулу (6), получим искомую формулу Парсеваля

$$
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \frac{(2\pi)^d}{V_\Gamma} \int_{M_\Gamma} \int_{\mathrm{Br}_d} |f_k(x)|^2 dx dk.
$$

Последнюю формулу можно переписать, пользуясь соотношением $V_\Gamma \cdot V_{\Gamma'} = (2\pi)^d$, в виде

$$
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = V_{\Gamma'} \int_{M_\Gamma} \int_{\mathrm{Br}_d} |f_k(x)|^2 dx dk.
$$

Явное выражение для функции $f_k(x)$ в терминах решетки Γ имеет вид

$$
(8)\quad f_k(x) = \frac{1}{V_{\Gamma'}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-ik\cdot\gamma} f(x+\gamma).
$$

Продолжим теперь построенное представление функций $f \in S(\mathbb{R}^d)$ на произвольные функции из $L^2(\mathbb{R}^d)$. Для этого введем пространство $\mathcal{H}_k$, являющееся пополнением пространства L_k по норме, определяемой изоморфизмом $I_k : L_0 \to L_k$, так что I_k продолжается до изометрии $I_k : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_k$.

Рассмотрим гильбертово векторное расслоение $\pi : \mathfrak{H} \to \mathrm{Br}_d$, слоем которого над точкой $k \in \mathrm{Br}_d$ является гильбертово пространство $\mathcal{H}_k$. Обозначим через $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H})$ гильбертово пространство его квадратично интегрируемых сечений со скалярным произведением

$$
(s_1, s_2) = \int_{\mathrm{Br}_d} (s_1(k), s_2(k)) dk,
$$

где $(s_1(k), s_2(k))$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}_k$. Пространство $\mathcal{H}$ является *прямым интегралом* гильбертовых пространств $\mathcal{H}_k$ по пространству Br_d с мерой dk. Заметим, что в физических работах гильбертово расслоение $\mathfrak{H}$ часто отождествляется с гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых сечений $\mathfrak{H}$.

Определяемое формулой (8) отображение

$$f \longmapsto \{\frac{1}{\sqrt{V_{\Gamma'}}}\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-ik\cdot\gamma} f(x+\gamma)\}_{k\in \mathrm{Br}_d}$$

продолжается до унитарного оператора

$$U : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Обратное отображение задается формулой

$$\{f_k(x)\}_{k\in\mathrm{Br}_d} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{V_{\Gamma'}}}\int_{\mathrm{Br}_d} f_k(x)dk.$$

1.2. **Многочастичный случай. Фермионное фоковское пространство.** Многочастичный случай описывается в терминах *фермионного фоковского пространства* над гильбертовым пространством F. Оно определяется как пополнение

$$\mathcal{F} = \overline{\Lambda(F)} = \overline{\bigoplus_p \Lambda^p(F)},$$

где $\Lambda^p(F)$ – подпространство p-частичных состояний вида

$$\Lambda^p(F) = \mathrm{span}\{v_1 \wedge \ldots \wedge v_p,\ v_j \in F\}.$$

Скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$ в F продолжается естественным образом до скалярного произведения на $\Lambda(F)$. А именно, на мономах $v_1\wedge\ldots\wedge v_p$ одинаковой степени оно задается формулой

$$(v_1\wedge\ldots\wedge v_p, v_1'\wedge\ldots\wedge v_p') := \sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sgn}\,\sigma}(v_1, v_{i_1}')\cdot\ldots\cdot(v_p, v_{i_p}'),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\sigma = \{i_1,\ldots,i_p\}$ множества $\{1,\ldots,p\}$, а $\mathrm{sgn}\,\sigma$ обозначает четность перестановки σ (скалярное произведение мономов разных степеней полагается равным нулю). Указанное скалярное произведение на мономах продолжается затем по линейности на всю алгебру $\Lambda(F)$. Фермионное фоковское пространство является пополнением алгебры $\Lambda(F)$ по введенной норме. Впрочем, в дальнейшем предполагается, что общее число состояний конечно, поэтому необходимости в пополнении возникать не будет.

Ортонормированный базис пространства $\Lambda^p(F)$ задается элементами вида

$$\frac{1}{p!}\{f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_p}\}, i_1 < \ldots < i_p,$$

где $\{f_i\}$ – ортонормированный базис F. Объединение этих базисов по всем p дает ортонормированный базис $\Lambda(F)$ и, тем самым, всего пространства $\mathcal{F}$.

1.3. **Операторы в фоковском пространстве.** Введем *оператор* $a_i^\dagger$ *рождения* частицы в состоянии f_i, задаваемый внешним умножением на вектор f_i. Эрмитово сопряженный к нему *оператор* a_i *уничтожения* частицы в состоянии f_i задается внутренним умножением на двойственный вектор $f_i' \in F'$. Эти операторы удовлетворяют стандартным антикоммутационным соотношениям

$$a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger = 0, \quad a_i a_j + a_j a_i = 0$$

и

$$a_i^\dagger a_j + a_j a_i^\dagger = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j\,, \\ 0 \text{ при } i \neq j\,. \end{cases}$$

Любой одночастичный линейный оператор $O : F \to F$ продолжается до линейного оператора $\hat{O} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ по формуле

$$\hat{O}\left(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p}\right) = (Ov_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (Ov_{i_p})$$

на мономах, а затем продолжается по линейности на всю алгеру $\Lambda(F)$ (напомним, что число состояний здесь и далее мы считаем конечным). В терминах операторов рождения и уничтожения этот оператор можно записать в виде

$$\hat{O} = \sum_{ij} O_{ij} a_i^\dagger a_j.$$

Применим теперь описанную конструкцию к интересующему нас гамильтониану H. Рассмотрим ортонормированный базис $\{\varphi_m(k)\}$ собственных функций оператора $H(k)$, являющихся решениями уравнения

$$H(k)\varphi_m(k) = E_m(k)\varphi_m(k).$$

Обозначим через $a_m^\dagger(k)$, $a_m(k)$ операторы рождения и уничтожения в пространстве $\mathcal{H}_k$, построенные по этому базису. Оператор $a_m^\dagger(k)$ (соотв. $a_m(k)$) отвечает рождению (соотв. уничтожению) частицы с энергией $E_m(k)$ в собственном состоянии $\varphi_m(k)$. Оператор $\hat{H}$ в этом базисе записывается в виде

$$\hat{H} = \sum_m \int_{\mathrm{Br}_d} H(k) a_m^\dagger(k) a_m(k) dk. \tag{9}$$

Предположим, что общее число уровней энергии равно $n \gg 1$, а сами уровни упорядочены по возрастанию, т.е. $E_l(k) \le E_m(k)$ при $l < m$. Тогда *основное состояние* $\Phi \in \mathcal{F}$ описывается следующим образом: все уровни от 1-го до p-го, расположенные ниже энергетической щели, заполнены, а уровни от $(p+1)$-го до n-го, расположенные выше энергетической щели, пусты. В терминах фоковского пространства основное состояние $\Phi = \Phi(k) \in \mathcal{F}$ оператора $\hat{H}$ задается формулой

$$\Phi(k) = a_1^\dagger(k) \ldots a_p^\dagger(k)\varphi_0,$$

где $\varphi_0 \in \Lambda^0(\mathcal{H}_0 = \mathbb{C})$ – вакуум.

Основное состояние можно также описать в терминах *обобщенных операторов уничтожения*

$$c_m(k) = \begin{cases} a_m(k), & \text{при } m > p \\ a_m^\dagger(-k), & \text{при } m \le p \end{cases}$$

и сопряженных к ним *обобщенных операторов рождения* $c_m^\dagger(k)$. Операторы $c_m(k)$ аннигилируют основное состояние и вместе с операторами $c_m^\dagger(k)$ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям вида

$$\begin{cases} c_m^\dagger(k)c_l^\dagger(k') + c_l^\dagger(k')c_m^\dagger(k) = 0, \\ c_m(k)c_l(k') + c_l(k')c_m(k) = 0, \\ c_m^\dagger(k)c_l(k') + c_l(k')c_m^\dagger(k) = \delta_{ml}\delta_{kk'}. \end{cases}$$

Предположим теперь, что энергия Ферми E_F находится на уровне 0, так что $E_m(k) < 0$ при $m \le p$ и $E_m(k) > 0$ при $m > p$. Тогда в терминах введенных операторов $c_m^\dagger(k)$, $c_m(k)$ гамильтониан $\hat{H}$ запишется в виде

$$\hat{H} = \sum_m \int_{\mathrm{Br}_d} |E_m(k)|\, c_m^\dagger(k) c_m(k) dk.$$

Отсюда ясно, что состояние в $\mathcal{F}$ является основным для $\hat{H}$, если оно аннигилируется всеми операторами $c_m(k)$. *Квазичастичные возбуждения* задаются композициями операторов вида $c_m^\dagger(k)\Phi(k)$, отвечающими рождению частиц при $m > p$ или дырок при $m \leq p$.

Обозначим через $\mathcal{W}_k$ $(2n)$-мерное векторное подпространство линейных операторов, порождаемое введенными операторами $c_m^\dagger(k)$, $c_m(k)$.

$$\mathcal{W}_k = \operatorname{span}\{c_1(k), \dots, c_n(k), c_1^\dagger(-k), \dots, c_n^\dagger(-k)\}.$$

Указанное пространство изоморфно прямой сумме $\mathcal{H}_k \oplus \mathcal{H}_{-k}$, так что все *пространство Намбу* $\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$ является прямым интегралом пространств $\mathcal{H}_k \oplus \mathcal{H}_{-k}$.

Рассмотрим пространство Намбу $\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$ более подробно. Имеется канонический изоморфизм $\mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$, сопоставляющий вектору $v \in \mathcal{H}$ двойственный вектор $v' \in \mathcal{H}^*$. Пользуясь этим изоморфизмом на подпространстве $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$ и обратным к нему отображением на подпространстве $\mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$, построим анти-линейное отображение

$$\gamma : \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H},$$

квадрат которого равен 1: $\gamma^2 = 1$. Сужение этого отображения на $\mathcal{W}_k$ является отображением $\gamma : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_{-k}$, которое задается формулой

$$\sum_m \left[\alpha_m c_m(k) + \beta_m c_m^\dagger(-k)\right] \longmapsto \sum_m \left[\bar{\alpha}_m c_m^\dagger(k) + \bar{\beta}_m c_m(-k)\right].$$

Антикоммутатор $\{\cdot\,,\cdot\}$ на $\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$ задает спаривание

$$\{\cdot\,,\cdot\} : (\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}) \otimes (\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

которое спускается до спаривания

$$\{\cdot\,,\cdot\} : \mathcal{W}_k \otimes \mathcal{W}_{-k} \to \mathbb{C}.$$

Композиция этого спаривания с отображением γ задает естественное скалярное произведение на $\mathcal{W}_k$:

$$\langle w, w' \rangle := \{\gamma w, w'\}.$$

Отображение γ относительно этого скалярного произведения является антиунитарным.

Вернемся к аннигиляторам основного состояния и рассмотрим подпространство

$$V(k) = \operatorname{span}\{c_1(k), \dots, c_n(k)\} \subset \mathcal{W}_k.$$

Тогда выполняется соотношение

$$\{V(k), V(-k)\} = 0.$$

Относительно введенного скалярного произведения

$$V(k) = V^{\mathrm{pol}}(k) \oplus V^{\mathrm{hol}}(k),$$

где

$$V^{\mathrm{pol}}(k) = \operatorname{span}\{c_{p+1}(k), \dots, c_n(k)\} \quad V^{\mathrm{hol}}(k) = \operatorname{span}\{c_1(k), \dots, c_p(k)\}.$$

Тем самым, операторы из $V^{\mathrm{pol}}p(k) \subset \mathcal{H}_k^*$ уничтожают частицы, а операторы из $V^{\mathrm{hol}}(k) \subset \mathcal{H}_{-k}$ уничтожают дырки (т.е. рождают частицы).

Для того, чтобы учесть внутренние степени свободы (такие как спин), заменим пространство $\mathcal{H}_0$ на пространство

$$\mathcal{H}_0^N = L^2(\mathbb{T}^d) \otimes \mathbb{C}^N = L^2(\mathbb{R}^d/\Gamma) \otimes \mathbb{C}^N. \tag{10}$$

Тогда гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H})$ заменится на $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H}) \otimes \mathbb{C}^N$, состоящее из квадратично интегрируемых сечений $s(k) = (s^1(k), \dots, s^N(k))$ расслоения $\mathfrak{H} \otimes \mathbb{C}^N$. Оно описывает частицы с N внутренними степенями свободы.

Все сказанное выше непосредственно переносится на этот случай. А именно, фиксируем ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}^N$, образованный векторами $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^N$, и рассмотрим ортонормированный базис собственных функций $\{\varphi_m^\alpha\}$ оператора $H(k)$, действующего в пространстве $\mathcal{H}_k^N$. Оператор рождения $a\ \dagger_{\alpha,m}\ (k)$ будет отвечать рождению частицы в состоянии φ_m^α, а оператор уничтожения $a_{\alpha,m}(k)$ уничтожению частицы в состоянии φ_m^α.

1.4. **Сверхпроводники.** Известно, что при низких температурах, близких к абсолютному нулю, многие металлы ведут себя как *сверхпроводники.* Иными словами, электрический ток течет по ним, практически не испытывая сопротивления. Согласно современной теории происходит это из-за того, что при таких температурах свободным электронам становится энергетически выгодным объединяться попарно, образуя так называемые *куперовские пары.* В отличие от фермионных электронов, эти квазичастицы являются бозонами с нулевым спином и удвоенным электрическим зарядом. Именно ток этих квазичастиц является сверхпроводящим.

Для описания возникающей ситуации введем гамильтониан $\hat{H}$, обобщающий гамильтониан (9) из предыдущего параграфа

$$(11)\quad \hat{H} = \int_{\mathrm{Br}_d} \sum_{i,j} \Big\{ H_{ij}(k) a_i^\dagger(k) a_j(k) + + \Delta_{ij}(k) a_i^\dagger(k) a_j^\dagger(-k) + \\ + \overline{\Delta_{ij}(k)} a_j(-k) a_i(k) \Big\}\, dk.$$

Этот гамильтониан по-прежнему коммутирует с трансляциями $\hat{T}_\gamma$. Наличие в нем дополнительных членов позволяет описывать сверхпроводники в терминах операторов рождения и уничтожения куперовских пар.

Так же, как в предыдущем параграфе, оператор $\hat{H}$ можно записать в терминах операторов $c_m^\dagger(k)$, $c_m(k)$ и ввести аннигиляторное подпространство $V(k)$.

Будем называть *квазичастичным расслоением* комплексное векторное расслоение $\rho : \mathcal{V} \to \mathrm{Br}_d$, слоями которого являются аннигиляторные подпространства

$$\rho^{-1}(k) = V(k) \subset \mathcal{W}_k.$$

Напомним, что для них выполняются соотношения: $\{V(k), V(-k)\} = 0$.

Указанное расслоение можно также определить в терминах грассманиана $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n})$. Для этого введем на нем инволюцию τ_0, сопоставляющую подпространству $V \in \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n})$ его ортогональное дополнение:

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{C}^{2n} : \{v, v'\} = 0 \text{ для всех } v' \in V\}.$$

В этих терминах квазичастичное расслоение можно определить как непрерывное соответствие

$$\nu : \mathrm{Br}_d \longrightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n}), \quad k \longmapsto V(k),$$

удовлетворяющее условию: $V(-k) = \tau_0(V(k))$. Если обозначить через τ инволюцию на Br_d, задаваемую формулой: $\tau(k) = -k$, то последнее соотношение можно переписать в виде: $\nu \circ \tau = \tau_0 \circ \nu$.

По аналогии с блоховским гамильтонианом $H(k) : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k$ можно ввести гамильтониан

$$\hat{H} = \int_{\mathrm{Br}_d} (a^\dagger(k), a(-k)) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}H(k) & \Delta(k) \\ \Delta^\dagger(k) & -\frac{1}{2}H(-k)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(k) \\ a^\dagger(-k) \end{pmatrix} dk, \tag{12}$$

где $(a^\dagger(k), a(-k)) = (a_1^\dagger(k), \ldots, a_n^\dagger(k), a_1(-k), \ldots, a_n(-k))$, а индекс t означает транспонирование. Матричный гамильтониан в середине этой формулы называется *гамильтонианом Боголюбова–де Жена* $H_{\mathrm{BdG}}(k)$. Он задает эндоморфизм пространства $\mathcal{W}_k$, подчиненный условию: $\Delta(k) = -\Delta(-k)^t$.

Для того чтобы найти аннигиляторы $c_m(k)$ основного состояния достаточно диагонализовать гамильтониан Боголюбова–де Жена, после чего гамильтониан $\hat{H}$ запишется в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{Br}_d} (c^\dagger(k), c(-k)) \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(|E_m(k)|) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(-|E_m(-k)|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(k) \\ c^\dagger(-k) \end{pmatrix} dk.$$

Список литературы

[1] G.Abramovich, P.Kalugin, Clifford modules and symmetries of topological insulators, Int. J. Geom. Methods in Phys. **9**(2012), N 3, 1250023, 1-31. ,

[2] Н.Ашкрофт, Н.Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва, 1979.

[3] M.F.Atiyah, I.M.Singer, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci. **37**(1969), 5-26.

[4] M.F.Atiyah, I.M.Singer, The index of elliptic operators, V, Ann. Math. **93**(1971), 139-149.

[5] J.E.Avron, R.Seiler, B.Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics, Phys. Rev. Lett. **51**(1990), N 1, 2185.

[6] M.Berry, Quantum phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London **A392**(1984), 45.

[7] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[8] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[9] R.Fox, Homotopy groups and torus homotopy groups, Ann. Math. **49**(1948), N 2, 471-510.

[10] R.Goodman, N.R.Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.

[11] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[12] P.Heinzner, A.Huckleberry, M.Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, Communs. Math. Phys. **257**(2005), 725-771.

[13] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[14] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[15] R.M.Kaufmann, Dan Li, B.Wehefritz-Kaufmann, Topological insulators and K-theory, ArXiv: 1510.08001.

[16] R.Kennedy, Homotopy theory of topologiczl insulators, Köln, 2014.

[17] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[18] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[19] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[20] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[21] M.Sato, Y.Ando, Topological superconductors: a review, Rep. Progress Phys. **80**(2017), 076501.

[22] А.Г.Сергеев, Спинорная геометрия Дирака и некоммутативная геометрия Конна, Труды МИАН **298**(2017), 276-314.

[23] А.Г.Сергеев, Применения некоммутативной геометрии в анализе и математической физике, Труды ММО **81**(2020), вып. 2, 1-59.

[24] S.Q.Shen, *Topological Insulators: Dirac Operators in Condensed Matters*, Berlin, Springer, 2013.

[25] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.