ЛЕКЦИЯ 3

1. Классификация гамильтонианов

Нашей целью является классификация гамильтонианов вида

$$\sum_{i,j}(A_{ij}a_i^\dagger a_j + B_{ij}a_i a_j + B_{ij}^* a_j^\dagger a_i^\dagger), \tag{1}$$

где $a_i^\dagger, a_j$ – фермионные операторы рождения и уничтожения, а матричные коэффициенты удовлетворяют соотношениями: $A_{ij} = A_{ji}^*$, $B_{ij} = -B_{ji}$. Предположим, что они обладают широкой энергетической целью. Спрашивается, когда можно продеформировать один из гамильтонианов указанного вида в другой с сохранением щели?

Прежде, чем мы перейдем к решению этой задачи, остановимся более подробно на представлении Намбу, которое будет играть важную роль в решении поставленной задачи.

1.1. **Представление Намбу.** Пусть V есть N-мерное комплексное гильбертово пространство, наделенное эрмитовым скалярным произведением $\langle\cdot\,,\rangle$. Обозначим через $\mathcal{F} = \Lambda(V)$ 2^N-мерное фоковское фермионное пространство над V. Рассмотрим пространство $\mathcal{Q}$ бесследовых квадратичных гамильтонианов вида (1). Это пространство замкнуто относительно операции скобки вида: $[X,Y]_i = i(XY - YX)$.

Обозначим через $W = V \oplus V^*$ комплексное линейное векторное пространство Намбу и рассмотрим представление α этого пространства в фоковском пространстве $\mathcal{F}$, задаваемое формулой

$$\alpha(v_1 + \langle v_2, \cdot\rangle) = \alpha_{v_1}^\dagger + \alpha_{v_2}, \tag{2}$$

где $\alpha_v^\dagger$ есть внешнее умножение на $v \in V$, а α_v – внутреннее умножение на $\langle v, \cdot\rangle$.

Если $X \in \mathcal{Q}$, то для любого $w \in W$ найдется $w' \in W$ такое, что

$$[X, \alpha(w)]_i = \alpha(w').$$

Отображение $w \mapsto w'$ является $\mathbb{C}$-линейным, поэтому оно задается некоторым комплексным линейным оператором $X_N : W \to W$ таким, что $X_N(w) = w'$ (обозначение X_N означает здесь и далее, что оператор X_N действует в пространстве Намбу W). Отображение $X \mapsto X_N$ является представлением алгебры Ли $\mathcal{Q}$ в W.

Представление Намбу является полезным при квантовании систем с несохранением числа частиц, таких как сверхпроводники. Эволюция подобных систем задается уравнением вида

$$\dot{w} = iH_N w$$

и его продолжением на фоковское пространство $\mathcal{F}$, где H_N есть представление гамильтониана H в пространстве Намбу. При этом состояние $w = v_1 + \langle v_2, \cdot \rangle$ можно интерпретировать как суперпозицию частицы в состоянии v_1 и дырки в состоянии v_2.

Опишем групповую структуру пространства Намбу. Пусть G есть группа симметрий, действующая на $\mathcal{F}$ унитарными или антиунитарными операторами. Будем говорить, что такой оператор A является *$\mathcal{Q}$-совместимым*, если $A\mathcal{Q}A^{-1} = \mathcal{Q}$. Обозначим через G_0 подгруппу G, действующую на $\mathcal{F}$ унитарными операторами.

Введем далее подгруппу $\mathcal{K}$ унитарной группы $\mathrm{U}(\mathcal{F})$, состоящую из экспоненциальных образов операторов из $\mathcal{Q}$, т.е.

$$\mathcal{K} = \{\exp(iX_F) : \ X_F \in \mathcal{Q}\}. \tag{3}$$

Тогда множество $\mathcal{Q}$-совместимых унитарных операторов будет совпадать с нормализатором $\mathcal{K}$ в группе $\mathrm{U}(\mathcal{F})$.

Кроме того, рассмотрим подгруппу $\mathcal{K}_c$ в $\mathrm{U}(\mathcal{F})$, состоящую из элементов вида

$$\mathcal{K}_c = \{\exp(iX_F + ic) : \ X_F \in \mathcal{Q}, c \in \mathbb{R}\}. \tag{4}$$

Ее можно отождествить с группой внутренних автоморфизмов $\mathcal{K}$ в группе $\mathrm{U}(\mathcal{F})$. Можно показать, что множество внешних автоморфизмов при $N > 4$ совпадает с $\mathbb{Z}_2$. Таким образом, существует единственный нетривиальный внешний автоморфизм $\mathcal{K}$, который можно построить явным образом (см. [1]).

Опишем теперь вещественную структуру на пространстве Намбу W. Она задается антилинейной инволюцией $C : W \to W$, которая действует на V по формуле

$$C(v) = \langle v, \cdot \rangle \in V^*,$$

а ее действие на V^* определяется соотношением $C^2 = 1$. В терминах оператора $\alpha(w)$ оператор C можно определить соотношением

$$\{\alpha(w_1), \alpha(w_2)\} = 2\langle C(w_1), w_2 \rangle,$$

из которого следует инвариантность C относительно симметрий.

Обозначим через $W_{\mathbb{R}}$ подпространство W вида

$$W_{\mathbb{R}} = \{w \in W : C(w) = w\}.$$

Это $2N$-мерное вещественное векторное подпространство в W с нормой, индуцируемой полуторалинейной формой на W. Тогда $\mathcal{Q}$-совместимые унитарные операторы будут отвечать изометриям $W_{\mathbb{R}}$.

1.2. **Изотипное разложение пространства Намбу.** Стандартные определения, относящихся к изотипным разложениям, можно найти в книге [10].

Комплексные унитарные представления компактной группы допускают единственное *изотипное разложение*. В случае группы G_0, действующей в пространстве Намбу W, оно имеет вид

$$W = \bigoplus_{\lambda} W_{\lambda}^{\mathbb{C}}, \tag{5}$$

где суммирование ведется по элементам λ множества $\widehat{G_0}$ классов неприводимых унитарных представлений группы G_0. Это множество состоит из счетного числа изолированных точек. Будем говорить, что представление имеет тип λ, если оно принадлежит классу эквивалентности $\lambda \in \widehat{G_0}$. В каждом блоке можно выбрать представителя $R_{\lambda}^{\mathbb{C}}$, являющегося неприводимым унитарным представлением типа λ.

Блок $W_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ представляется в виде

$$W_{\lambda}^{\mathbb{C}} = R_{\lambda}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G_0}(R_{\lambda}^{\mathbb{C}}, W), \tag{6}$$

где пространство $\mathrm{Hom}_{G_0}(R_{\lambda}^{\mathbb{C}}, W)$, состоящее из G_0-эквивариантных гомоморфизмов, называется *пространством кратностей* представления $R_{\lambda}^{\mathbb{C}}$, а его размерность – кратностью $R_{\lambda}^{\mathbb{C}}$.

Аналогом пространства $\widehat{G}_0$ в вещественном случае является множество $\hat{G}_0^{\mathbb{R}}$ классов эквивалентности вещественных неприводимых представлений группы G_0, являющееся фактором $\widehat{G}_0$ по действию комплексного сопряжения.

Изотипное разложение пространства $W_{\mathbb{R}}$ в этом случае имеет вид

$$W_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{\lambda} W_{\lambda},$$

где суммирование ведется по элементам λ множества $\hat{G}_0^{\mathbb{R}}$, а блоки W_{λ} имеют вид

$$W_{\lambda} = R_{\lambda} \otimes_{F_{\lambda}} E_{\lambda},$$

где $E_{\lambda} = \mathrm{Hom}_{G_0}(R_{\lambda}, W_{\mathbb{R}})$ есть пространство кратностей вещественного неприводимого представления R_{λ} типа λ, а F_{λ} – множество сплетающих операторов R_{λ}, т.е. $F_{\lambda} = \mathrm{Hom}_{G_0}(R_{\lambda}, R_{\lambda})$. По лемме Шура F_{λ} совпадает либо с $\mathbb{R}$, либо с $\mathbb{C}$, либо с $\mathbb{H}$.

Действие оператора iH_N задается формулой

$$iH_N = \bigoplus_\lambda 1 \otimes_{F_\lambda} h_\lambda, \tag{7}$$

где $\lambda \in \hat{G}_0^{\mathbb{R}}$, h_λ – гомоморфизм $E_\lambda \to E_\lambda$.

1.3. **Классификация гамильтонианов.** В предыдущем параграфе мы описали изотипные разложения пространства Намбу для группы унитарных симметрий G_0. Имеется параллельная конструкция изотипных разложений для анти-унитарных симметрий, изложенная в [1].

Перейдем к задаче классификации гамильтонианов на $W_{\mathbb{R}}$. При этом будем рассматривать ситуацию, охватывающую оба типа симметрий. А именно будем предполагать, что у нас имеется компактная группа K, действующая в $W_{\mathbb{R}}$. В ней выделена подгруппа K_0, которая либо совпадает с K, либо является в ней подгруппой индекса 2. В последнем случае обозначим через K_1 дополнение к K_0 в K.

Обозначим через S пространство операторов вида iH_N, действующих в $W_{\mathbb{R}}$, которые коммутируют с действием K_0 и антикоммутируют с действием K_1. Мы также предполагаем, что точка 0 не принадлежит спектру iH_N, т.е. операторы из S имеют энергетическую щель на нулевом уровне энергии.

Для того, чтобы установить гомотопический тип оператора iH_N, рассмотрим его непрерывную деформацию в пределах S, "уплощающую" спектр, сводя его к двум точкам $\{+i, -i\}$.

Более конкретно, рассмотрим гомотопию $y(z,t) : \mathbb{C} \times [0,1] \to \mathbb{C}$ вида

$$y(z,t) = (1-t)z + it\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z).$$

Так как оператор iH_N является нормальным, то корректно определена операторно-значная функцию $O(t) := y(iH_N, t)$, которая совпадает при $t = 0$ с iH_N. Обозначим через $\tilde{H}_N$ оператор $O(1)$, спектр которого состоит из точек $\pm i$, а через $\tilde{S}$ пространство операторов вида $i\tilde{H}_N$. Это пространство является деформационным ретрактом S.

Оператор $i\tilde{H}_N$ допускает изотипное разложение вида

$$i\tilde{H}_N = \bigoplus_\lambda 1 \otimes_{F_\lambda} \tilde{h}_\lambda, \tag{8}$$

аналогичное (7). Операторы $\tilde{h}_\lambda : E_\lambda \to E_\lambda$ обладают следующими тремя свойствами:

(1) $\tilde{h}_\lambda^2 = -1$;

(2) операторы $\tilde{h}_\lambda$ коммутируют со скалярами $f \in F_\lambda$;
(3) операторы $\tilde{h}_\lambda$ антикоммутируют с элементами группы K_1.

В соответствии с разложением (**??**) будем иметь

$$\tilde{S} = \prod_\lambda \tilde{S}_\lambda,$$

где $\tilde{S}_\lambda$ – пространство операторов $\tilde{h}_\lambda$, удовлетворяющих выписанным выше условиям.

Тем самым, исследование гамильтонианов iH_N сводится к описанию гамильтонианов $i\tilde{H}_N$, действующих в пространствах $\tilde{S}_\lambda$. Наложенные выше условия на изотипные разложения этих гамильтонианов, полностью определяют структуру пространств кратностей E_λ и отвечающих им пространств $\tilde{S}_\lambda$. Все возникающие ситуации связаны с 10 различными алгебрами Клиффорда и их продолжениями с помощью гомоморфизмов $\tilde{h}_\lambda$. Их явное описание можно найти в статье [1]. Укажем только, что имеется три класса, для которых пространства $\tilde{S}_\lambda$ и отвечающие им пространства E_λ выглядят следующим образом:

(1) $\tilde{S}_\lambda$ совпадает с одной из групп $\mathrm{O}(k)$, $\mathrm{U}(k)$, $\mathrm{Sp}(k)$, которым отвечают пространства E_λ, равные $\mathbb{R}^{2k}$, $\mathbb{C}^{2k}$, $\mathbb{H}^{2k}$ соответственно;
(2) $\tilde{S}_\lambda$ совпадает с одним из грассманианов

$$\bigcup_{m=0}^{k} \mathrm{O}(k)/\left(\mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(k-m)\right),$$
$$\bigcup_{m=0}^{k} \mathrm{U}(k)/\left(\mathrm{U}(m) \times \mathrm{U}(k-m)\right),$$
$$\bigcup_{m=0}^{k} \mathrm{Sp}(k)/\left(\mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(k-m)\right),$$

;
(3) $\tilde{S}_\lambda$ совпадает с одним из однородных пространств

$$\mathrm{O}(2k)/\mathrm{U}(k),\ \mathrm{Sp}(k)/\mathrm{U}(k),\ \mathrm{U}(k)/\mathrm{O}(k),\ \mathrm{U}(2k)/\mathrm{Sp}(k),$$

которым отвечают пространства E_λ, равные $\mathbb{R}^{2k}$, $\mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k$, $\mathbb{R}^{4k}$ соответственно.

Это завершает гомотопическую классификацию гамильтонианов.

Список литературы

[1] G.Abramovich, P.Kalugin, Clifford modules and symmetries of topological insulators, Int. J. Geom. Methods in Phys. **9**(2012), N 3, 1250023, 1-31. ,

[2] Н.Ашкрофт, Н.Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва, 1979.

[3] M.F.Atiyah, I.M.Singer, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci. **37**(1969), 5-26.

[4] M.F.Atiyah, I.M.Singer, The index of elliptic operators, V, Ann. Math. **93**(1971), 139-149.

[5] J.E.Avron, R.Seiler, B.Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics, Phys. Rev. Lett. **51**(1990), N 1, 2185.

[6] M.Berry, Quantum phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London **A392**(1984), 45.

[7] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[8] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[9] R.Fox, Homotopy groups and torus homotopy groups, Ann. Math. **49**(1948), N 2, 471-510.

[10] R.Goodman, N.R.Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.

[11] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[12] P.Heinzner, A.Huckleberry, M.Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, Communs. Math. Phys. **257**(2005), 725-771.

[13] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[14] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[15] R.M.Kaufmann, Dan Li, B.Wehefritz-Kaufmann, Topological insulators and K-theory, ArXiv: 1510.08001.

[16] R.Kennedy, Homotopy theory of topological insulators, Dissertation, Köln, 2014.

[17] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[18] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[19] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[20] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[21] M.Sato, Y.Ando, Topological superconductors: a review, Rep. Progress Phys. **80**(2017), 076501.

[22] А.Г.Сергеев, Спинорная геометрия Дирака и некоммутативная геометрия Конна, Труды МИАН **298**(2017), 276-314.

[23] А.Г.Сергеев, Применения некоммутативной геометрии в анализе и математической физике, Труды ММО **81**(2020), вып. 2, 1-59.

[24] S.Q.Shen, *Topological Insulators: Dirac Operators in Condensed Matters*, Berlin, Springer, 2013.

[25] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.