ЛЕКЦИЯ 5. K-ТЕОРИЯ И ИНВОЛЮТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

5.1. Отступление: K-теория

Напомним конструкцию Гротендика, позволяющую построить каноническим образом по любой абелевой полугруппе S группу K, называемую группой Гротендика полугруппы S. Это абелева группа, заданная вместе с полугрупповым гомоморфизмом $\vartheta : S \to K$, обладающая следующим универсальным свойством: если R –другая абелева группа, заданная вместе с полугрупповым гомоморфизмом $\gamma : S \to R$, то существует единственный гомоморфизм $\kappa : K \to R$ такой, что $\gamma = \kappa \circ \vartheta$. При этом группа K определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Построить группу Гротендика можно следующим образом. Рассмотрим на множестве $S \times S$ следующее отношение эквивалентности:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff$$

если существует $z \in S$ такое, что $x + y' + z = x' + y + z$.

Тогда группа K есть $K = S \times S/\sim$, а гомоморфизм ϑ задается формулой: $\vartheta(x) := [x, 0]$, так что $[x, y] = \vartheta(x) - \vartheta(y)$ в группе K.

Обозначим через $\mathrm{Vect}(X)$ полугруппу векторных расслоений конечного ранга над топологическим пространством X с прямой суммой в качестве полугрупповой операции. Будем считать, что топологическое пространство X компактно и имеет отмеченную (базисную) точку x_0. Группа $K(X)$ есть по определению группа Гротендика полугруппы $\mathrm{Vect}(X)$. Если E, F – два расслоения над X таких, что $[E] = [F]$, т.е. их классы в группе Гротендика совпадают, это означает, что найдется расслоение $G \to X$ такое, что $E \oplus G \cong F \oplus G$. Выберем тогда расслоение G' такое, что прямая сумма $G \oplus G'$ является тривиальным расслоением $R \to X$. Тогда $E \oplus G \oplus G' \cong F \oplus G \oplus G'$, т.е. $E \oplus R \cong F \oplus R$. Иными словами, группа $K(X)$ описывает классы стабильно эквивалентных расслоений над X.

Определим $\tilde{K}(X)$ как ядро отображения $i^* : K(X) \to K(x_0)$, где $i : x_0 \hookrightarrow X$ – вложение отмеченной точки. Если обозначить через $\pi : X \to x_0$ естественную проекцию, то π^* будет индуцировать расщепление

$$K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus K(x_0).$$

Пусть X, Y – пара топологических подпространств, где Y – замкнутое подпространство X. Определим группу $K(X, Y)$ равенством

$$K(X, Y) = \tilde{K}(X/Y).$$

В частности, $K(X, \emptyset) = K(X)$.

Введем операцию надстройки в категории топологических пространств с отмеченными точками. Положим

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y),$$

где $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$, а x_0, y_0 – отмеченные точки в пространствах X, Y соответственно. Моделью окружности $\mathbb{S}^1$ для нас будет служить факторпространство $I/\partial I$, где $I = [0, 1]$. Аналогично, моделью сферы $\mathbb{S}^n$ будет служить факторпространство $I^n/\partial I^n$, где I^n – единичный куб в $\mathbb{R}^n$, так что $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{S}^1 (n$ раз). Пространство $\mathbb{S}^1 \wedge X$ называется (приведенной) надстройкой над X и обозначается через SX. При этом n-кратно итерированная надстройка $S \ldots SX (n$ раз) гомеоморфна пространству $\mathbb{S}^n \wedge X$ и обозначается через $S^n X$.

Введем при $n \geq 0$ относительную K-группу пары топологических пространств

$$K^{-n}(X, Y) = \tilde{K}^{-n}(X/Y) = \tilde{K}(S^n(X/Y)),$$

где $\tilde{K}^{-n}(X) = \tilde{K}(S^n X)$. В частности, $K^{-n}(X) = K^{-n}(X, \emptyset)$. Эти группы включаются в точную последовательность

$$\ldots K^{-2}(Y) \to K^{-1}(X, Y) \to K^{-1}(X) \to K^{-1}(Y) \to$$
$$\to K^{0}(X, Y) \to K^{0}(X) \to K^{0}(Y)$$

Одним из основных фактов K-теории является периодичность Ботта: для любого $n \geq 0$ имеет место изоморфизм

$$K^{-n}(X) \cong K^{-n-2}(X).$$

5.2. KR-теория и инволютивные пространства

Определение

Инволютивное пространство (X, τ) есть топологическое пространство X, наделенное **инволюцией**, т.е. гомеоморфизмом $\tau : X \to X$, квадрат которого τ^2 есть тождественное отображение id_X.

Такое пространство в KR-теории принято также называть **R-пространством**. Примером может служить пространство

$$\mathbb{R}^{p,q} := \mathbb{R}^q + i\mathbb{R}^p$$

с координатами $y + ix = (y, x)$. Инволюция на нем задается отображением $\tau : (y, x) \mapsto (y, -x)$. Для дальнейшего обозначим через $\mathbb{B}^{p,q}$ единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$, а через $\mathbb{S}^{p,q}$ единичную сферу в $\mathbb{R}^{p,q}$, так что $\mathbb{R}^{p,p} \cong \mathbb{C}^p$.

Симметрия обращения времени, т.е. T-симметрия, в инволютивном пространстве X задается обращением знака локальных координат. Например, если сфера $\mathbb{S}^d$ реализована в виде единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ с координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_d)$, удовлетворяющими соотношению $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_d^2 = 1$, то в качестве T-симметрии на ней естественно взять отображение $(x_0, x_1, \ldots, x_d) \mapsto (x_0, -x_1, \ldots, -x_d)$, так что сфера $\mathbb{S}^d$ отождествляется при этом со сферой $\mathbb{S}^{1,d} \subset \mathbb{R}^{1,d}$. Для тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ с координатами $(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_d})$ T-симметрия задается отображением: $(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_d}) \mapsto (e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{-i\theta_d})$.

Множество неподвижных точек инволюции τ на X есть множество
$$X^\tau = \{x \in X : \tau(x) = x\}.$$
Предполагается, что оно состоит из конечного числа точек. В рассмотренном выше примере сферы $\mathbb{S}^{1,d}$ у инволюции τ имеется две неподвижных точки $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$, а у тора $\mathbb{T}^d$ есть 2^d неподвижных точек, задаваемых наборами $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ из чисел $\varepsilon_i = \pm 1$.

Определение

Кватернионным векторным расслоением (E, ρ) или **Q-расслоением** над инволютивным пространством (X, τ) называется комплексное векторное расслоение $\pi : E \to X$, наделенное **анти-инволюцией** ρ, совместимой с τ.

Анти-инволюция ρ задается антилинейным изоморфизмом расслоений $\rho : E \to E$ таким, что $\rho^2 = -\mathrm{id}_E$. Его совместимость с инволюцией τ означает, что $\pi \circ \rho = \tau \circ \pi$. В неподвижных точках $x \in X^\tau$ отображение $\rho_x : E_x \to E_x$ есть антилинейное отображение с $\rho_x^2 = -\mathrm{id}_{E_x}$.

Если в приведенном определении заменить анти-инволюцию ρ на инволюцию σ такую, что $\sigma^2 = \mathrm{id}_E$, мы придем к определению векторного $\mathbf{R}$-расслоения (E, σ) над (X, τ).

Определение

Кватернионной K-группой $KQ(X, \tau)$ инволютивного пространства (X, τ) называется группа Гротендика полугруппы векторных Q-расслоений (E, ρ) конечного ранга над (X, τ).

Аналогичным образом определяется вещественная K-группа $KR(X, \tau)$, являющаяся группой Гротендика полугруппы векторных R-расслоений (E, σ) над (X, τ).

Относительная группа $KR(X,Y)$ определяется как $\widetilde{KR}(X/Y)$. С учетом этого определения можно ввести высшие KR-группы

$$KR^{p,q}(X,Y) := KR(X \times \mathbb{B}^{p,q}, X \times \mathbb{S}^{p,q} \cup Y \times \mathbb{B}^{p,q})$$

и $KR^{-q}(X,Y) := KR^{0,q}(X,Y)$.

Введенные KR-группы связаны точными последовательностями

$$\ldots \to KR^{-1}(X) \to KR^{-1}(Y) \to KR(X,Y) \to KR(X) \to KR(Y),$$

$$\begin{aligned} \ldots \to KR^{p,1}(X) \to KR^{p,1}(Y) \to KR^{p,0}(X,Y) \to \\ \to KR^{p,0}(X) \to KR^{p,0}(Y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $p \geq 0$ – произвольное целое неотрицательное число.

Имеет место следующая теорема периодичности (см. книгу Атьи)

$$KR^{p+1,q+1}(X,Y) \cong KR^{p,q}(X,Y), \tag{2}$$

откуда следует, что

$$KR^{p-q}(X,Y) \cong KR^{p,q}(X,Y), \tag{3}$$

так что $KR^{p}(X,Y) = KR^{p,0}(X,Y)$ при $p \geq 0$.

Пользуясь соотношением (3), точную последовательность (1) можно продолжить вправо до бесконечности.

Помимо (1,1)-периодичности (2), **имеется еще периодичность Ботта**

$$KR^{n+8}(X) \cong KR^n(X).$$

Зная KR-группы, можно вычислить и кватернионные KQ**-группы, пользуясь изоморфизмом**

$$KQ^n(X) \cong KR^{n-4}(X).$$

В случае, когда инволюция τ **тривиальна, KR-теория сводится к обычной K-теории вещественных векторных расслоений, обозначаемой через KO:**

$$KO^n(X) \cong KR^n(X)|_{\tau=\mathrm{id}}.$$

В силу приведенного выше изоморфизма (3) **группы** $\boldsymbol{KR^{p,q}(X)}$ **зависят только от разности** $\boldsymbol{p-q}$**, а ввиду периодичности Ботта от числа**

$$\boldsymbol{j := (p-q) \bmod 8.}$$

5.3. Гильбертово расслоение топологического диэлектрика

Топологические диэлектрики, обладающие симметрией относительно обращения времени, описываются математически в терминах KR-теории.

Напомним, что через $\pi : \mathfrak{H} \to X$ обозначается гильбертово расслоение топологического диэлектрика над импульсным пространством $X = \mathrm{Br}_d$. Слоем этого расслоения над точкой $x \in X$ является гильбертово пространство $\mathcal{H}_x$, а через $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H})$ обозначается гильбертово пространство его квадратично интегрируемых сечений. Эти сечения отождествляются с физическими состояниями, отвечающими собственным значениям $E(x)$.

Преобразование обращения времени на пространстве $\mathcal{H}$ задается оператором Θ, который является анти-унитарным оператором, удовлетворяющим условиям: $\Theta^2 = -1$ и $\Theta^* = -\Theta$.

Гильбертово расслоение $\pi : \mathfrak{H} \to X$, наделенное оператором Θ, становится векторным Q-расслоением $\pi : (\mathfrak{H}, \Theta) \to (X, \tau)$. Иными словами, действие инволюции τ поднимается до анти-инволюции Θ на гильбертовом расслоении $\pi : \mathfrak{H} \to X$.

Гамильтониан $H(x)$, инвариантный относительно обращения времени, должен удовлетворять условию

$$\Theta H(x)\Theta^* = H(\tau(x)),\ x \in X.$$

Поэтому если φ – собственное состояние для H, т.е. $H(x)\varphi(x) = E(x)\varphi(x)$, то $\Theta\varphi$ – собственное состояние для $\Theta H \Theta^*$ с той же энергией E:

$$[\Theta H \Theta^*]\Theta\varphi(x) = E(\tau(x))\Theta\varphi(x).$$

Иными словами, состояния φ и $\Theta\varphi$ принадлежат одной и той же зоне с энергией E. Тем самым, каждая зона при наличии Т-симметрии является дважды вырожденной, а $(\varphi, \Theta\varphi)$ составляют пару Крамерса.

Ранг гильбертова расслоения $\mathfrak{H}$ является при этом четным, т.е. равным $2N$, где N – натуральное число. Если T есть единственная симметрия $\mathfrak{H}$, т.е. каждая зона в точности дважды вырождена, то $\mathfrak{H}$ представляется в виде

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{H}_i,$$

где $\mathfrak{H}_i$ – подрасслоения $\mathfrak{H}$, пространство сечений $\Gamma(X, \mathfrak{H}_i)$ которых порождается парой глобальных сечений Крамерса $(\varphi_i, \Theta\varphi_i)$.

Обозначим через $w^i : X \to \mathrm{U}(2)$ функцию перехода расслоения $\mathfrak{H}_i$, которая в физической литературе называется калибровочным Т-преобразованием. Преобразование T-симметрии на $\mathfrak{H}_i$ меняет w^i на $w^i \circ C$, где C – эрмитово сопряжение. В терминах локальных координат (x, v) на $\mathfrak{H}_i$ оператор Θ действует по формуле: $(x, v) \mapsto (\tau(x), w^i(x)\bar{v})$. Если применить Θ к правой части последней формулы и воспользоваться соотношением $\Theta^2 = -\mathrm{id}_{\mathfrak{H}_i}$, то придем к равенству

$$w^i(\tau(x))\bar{w}^i(x) = -\mathrm{id}_{\mathcal{H}_i}, \text{ т.е. } (w^i)^t(\tau(x)) = -w^i(x).$$

В частности, в неподвижных точках $x \in X^\tau$ матрица $w^i(x)$ кососимметрична.

В случае, когда

$$\boldsymbol{X = \mathbb{S}^3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\},}$$

Т-симметрия задается формулой: $\boldsymbol{\tau(\alpha, \beta) = (\bar{\alpha}, -\beta)}$. **Ее неподвижными точками являются** $\boldsymbol{(\pm 1, 0)}$, **а функция перехода** $\boldsymbol{w : \mathcal{S}^3 \to \mathrm{U}(2)}$ **задается формулой**

$$\boldsymbol{w(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\bar{\alpha} & \beta \end{pmatrix}}$$

5.4. Отступление: связь с некоммутативной геометрией

Пусть задана алгебра A и ее представление r в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ограниченными линейными операторами.

Определение

Спектральной тройкой для алгебры A называется тройка $(A, \mathcal{H}, D)$, где D – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, обладающий компактной резольвентой и удовлетворяющий следующему условию: коммутатор $[D, r(a)]$ является ограниченным линейным оператором для любого $a \in A$ (в дальнейшем мы опускаем знак r и обозначаем $r(a)$ просто через a).

В случае, когда (A, τ) есть алгебра с инволюцией τ, мы можем уточнить это определение с учетом действия клиффордовых алгебр. А именно, введем понятие KR^j-цикла над алгеброй A, где

$$j = (p - q) \bmod 8.$$

Определение

KR^j-циклом над алгеброй A с $j \in \mathbb{Z}_8$ называется пятерка $(A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$ при четном j или четверка $(A, \mathcal{H}, D, C)$ при нечетном j, где:

1) $(A, \mathcal{H}, D)$ есть спектральная тройка для алгебры A;

2) C – оператор зарядового сопряжения, т.е. анти-унитарный оператор на $\mathcal{H}$, согласованный с τ в том смысле, что

$$CaC^{-1} = \tau(a) \text{ для всех } a \in A;$$

2) χ – **оператор градуировки на** $\mathcal{H}$, **т.е.** $\chi^* = \chi$, $\chi^2 = \mathrm{id}$, **который обладает следующими свойствами коммутирования:**

$$D\chi = -\chi D \text{ и } \chi a = a\chi \text{ для любого } a \in A;$$

3) операторы C, D **и** χ **удовлетворяют следующим условиям коммутирования:**

$$C^2 = \pm 1, CD = \pm DC, C\chi = \pm \chi C,$$

где знаки $\pm$ **выбираются из следующих таблиц:**

$j \bmod 8$	0	2	4	6
$C^2 = \pm 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$CD = \pm DC$	$+$	$+$	$+$	$+$
$C\chi = \pm \chi C$	$+$	$-$	$+$	$-$

и

$j \bmod 8$	1	3	5	7
$C^2 = \pm 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$CD = \pm DC$	$-$	$+$	$-$	$+$

4) задано представление ρ алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}_{p,q}$ ограниченными операторами, действующими в пространстве $\mathcal{H}$, которые коммутируют с действием алгебры A и оператором C и антикоммутируют с операторами D и χ.

В соответствии с приведенным определением следует различать случаи четного и нечетного $j \bmod 8$. В первом случае мы будем обозначать KR^j-цикл через KR^j_{ev}, во втором — через KR^j_{od}.

Рассмотрим важный пример KR^j-циклов, относящийся к спинорной геометрии. Пусть M – компактное спинорное многообразие размерности n с оператором Дирака $\mathcal{D}$, действующим в гильбертовом пространстве спиноров $\mathcal{H} = L^2(M, \mathcal{S})$ (за определениями, относящимися к спинорной геометрии отсылаем к книге Лоусона и Микельсон). Обозначим через $A = C^\infty(M)$ алгебру гладких функций на M. Тогда тройка $(A, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ является спектральной тройкой для алгебры A. Положим $j \equiv n \bmod 8$. Введем оператор градуировки $\chi = c(\gamma)$ также, как для четномерных клиффордовых алгебр (см. упомянутую книгу Лоусона и Микельсон) и обозначим через C оператор зарядового сопряжения. Тогда при четном j пятерка $(A, \mathcal{H}, \mathcal{D}, C, \chi)$ является KR^j_{ev}-циклом.