ЛЕКЦИЯ 6

1. Состояния Майорана

1.1. **Нулевые моды Майорана.** Пусть $H(x)$ есть блоховский гамильтониан на импульсном пространстве X. Напомним, что он является T-инвариантным, если

$$\Theta H(x)\Theta^* = H(\tau(x)),\ x \in X.$$

Рассмотрим случай, когда пространство сечений гильбертова расслоения $\pi : \mathfrak{H} \to X$ порождается глобальными сечениями Крамерса φ и $\Theta\varphi$. Эту пару сечений, имеющих одинаковую энергию, можно рассматривать как квазичастицу, составленную из φ и $\Theta\varphi$. Ее эффективный гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \Theta H(x)\Theta^* \\ H(x) & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Гамильтониан $\tilde{H}$ является инвариантным относительно обращения времени, а уравнение на собственный вектор φ гамильтониана H с собственным значением E принимает в терминах $\tilde{H}$ следующую матричную форму

$$\begin{pmatrix} 0 & \Theta H(x)\Theta^* \\ H(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \Theta\varphi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\tau(x))\Theta\varphi(x) \\ E(x)\varphi(x) \end{pmatrix}\ .$$

Вспомним, что гамильтониан H самосопряжен, т.е. $H^*(x) = H(x)$, поэтому $\tilde{H}$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{H}^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & H(\tau x) \\ H(x) & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & H(x) \\ H(\tau x) & 0 \end{pmatrix} = \tilde{H}(\tau(x)).$$

Иначе говоря, $\tilde{H}$ не является ни самосопряженным, ко кососимметричным оператором.

Предположим, что на пространстве $\mathcal{H}$ задана вещественная структура I, удовлетворяющая условиям: $I^2 = \mathrm{id}$, $I^* = I$.

Определение 1. Состояние ψ называется *состоянием Майорана* относительно вещественной структуры I, если оно удовлетворяет условию вещественности $I\psi = \psi$.

Пользуясь оператором обращения времени Θ, можно построить вещественную структуру на $\tilde{H}$, полагая

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta^* \\ \Theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathcal{I}^* = \mathcal{I}$ и $\mathcal{I}^2 = 1$. Вещественная структура $\mathcal{I}$ действует на крамерсовскую пару $\Phi = (\varphi, \Theta\varphi)$ по формуле

$$\begin{pmatrix} 0 & \Theta^* \\ \Theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Theta\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \Theta\varphi \end{pmatrix} \ .$$

Иначе говоря, $\mathcal{I}\Phi = \Phi$, т.е. квазичастица $\Phi = (\varphi, \Theta\varphi)$ является состоянием Майорана относительно вещественной структуры $\mathcal{I}$.

Напомним, что в крамерсовской паре $\Phi = (\varphi, \Theta\varphi)$ состояния φ и $\Theta\varphi$ ортогональны друг другу и потому линейно независимы, если только их энергия отлична от нуля. Однако в неподвижных точках $x \in X^\tau$ мы имеем равенство $\Theta\varphi(x) = \varphi(x)$. В частности, локализованная мода Майорана должна иметь нулевую энергию в этой точке. Это рассуждение мотивирует следующее определение.

Определение 2. *Нулевой модой Майорана* называется состояние Майорана $\Phi_0 = (\varphi_0, \Theta\varphi_0)$, заданное в малой окрестности неподвижной точки $x_0 \in X^\tau$, которое удовлетворяет условию: $\varphi_0(x_0) = \Theta\varphi_0(x_0) = 0$ и меняет знак в этой точке.

1.2. **Аналитический $\mathbb{Z}_2$-индекс.** Предположим, что оператор H, а следовательно и $\tilde{H}$, является фредгольмовым. Оператор $H(x)$ вблизи неподвижной точки x_0 является суммой оператора Дирака D и квадратичной поправки, которая не меняет гомотопического класса (см. [24]). Поэтому индекс топологического диэлектрика определяется суммой индексов оператора Дирака в неподвижных точках.

Оператор $\tilde{H}$ вблизи неподвижной точки x_0 можно аппроксимировать оператором Дирака, которому отвечает матричный оператор

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Тем самым, оператор $\tilde{H}$ вблизи неподвижной точки x_0 представляется в виде суммы кососимметрического оператора $\mathcal{D}$ и квадратичной поправки, не влияющей на индекс оператора $\tilde{H}$ в этой точке.

Для вещественных кососимметрических эллиптических операторов P Атья и Зингер (см. [4], [3]) определили их аналитический $\mathbb{Z}_2$-индекс как

$$\mathrm{ind}_a P = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} P \bmod 2.$$

Поэтому естественно определить $\mathbb{Z}_2$-инвариант ν топологического диэлектрика как сумму

$$\nu = \sum_{x \in X^\tau} \mathrm{ind}_a \tilde{H}(x) = \sum_{x \in X^\tau} \dim \operatorname{Ker} \tilde{H}(x) \bmod 2.$$

Физический смысл $\mathbb{Z}_2$-инварианта ν состоит в том, что он совпадает с четностью числа нулевых мод Майорана по всем неподвижным точкам $x \in X^\tau$.

1.3. **KQ-цикл, ассоциированный с квазичастицей Майорана.** Построим KQ-цикл, ассоциированный с квазичастицей Майорана.

В качестве оператора градуировки χ возьмем оператор

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Указанный оператор порождает естественную $\mathbb{Z}_2$-градуировку в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. А именно, рассмотрим для крамерсовской пары $\Phi = (\varphi, \Theta\varphi)$ разложение вида

$$\frac{1+\chi}{2}\,\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{1-\chi}{2}\,\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta\varphi \end{pmatrix} .$$

По определению, KQ-цикл крамерсовской пары есть пятерка $(C^\infty(X), \mathcal{H}, \tilde{H}, \mathcal{I}, \chi)$, где

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta H \Theta^* \\ H & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta^* \\ \Theta & 0 \end{pmatrix} .$$

Список литературы

[1] G.Abramovich, P.Kalugin, Clifford modules and symmetries of topological insulators, Int. J. Geom. Methods in Phys. **9**(2012), N 3, 1250023, 1-31. ,

[2] Н.Ашкрофт, Н.Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва, 1979.

[3] M.F.Atiyah, I.M.Singer, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci. **37**(1969), 5-26.

[4] M.F.Atiyah, I.M.Singer, The index of elliptic operators, V, Ann. Math. **93**(1971), 139-149.

[5] J.E.Avron, R.Seiler, B.Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics, Phys. Rev. Lett. **51**(1990), N 1, 2185.

[6] M.Berry, Quantum phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London **A392**(1984), 45.

[7] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[8] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[9] R.Fox, Homotopy groups and torus homotopy groups, Ann. Math. **49**(1948), N 2, 471-510.

[10] R.Goodman, N.R.Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.

[11] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[12] P.Heinzner, A.Huckleberry, M.Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, Communs. Math. Phys. **257**(2005), 725-771.

[13] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[14] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[15] R.M.Kaufmann, Dan Li, B.Wehefritz-Kaufmann, Topological insulators and K-theory, ArXiv: 1510.08001.

[16] R.Kennedy, Homotopy theory of topological insulators, Dissertation, Köln, 2014.

[17] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[18] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[19] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[20] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[21] M.Sato, Y.Ando, Topological superconductors: a review, Rep. Progress Phys. **80**(2017), 076501.

[22] А.Г.Сергеев, Спинорная геометрия Дирака и некоммутативная геометрия Конна, Труды МИАН **298**(2017), 276-314.

[23] А.Г.Сергеев, Применения некоммутативной геометрии в анализе и математической физике, Труды ММО **81**(2020), вып. 2, 1-59.

[24] S.Q.Shen, *Topological Insulators: Dirac Operators in Condensed Matters*, Berlin, Springer, 2013.

[25] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.