Современные проблемы теории чисел

1. (Kevin O'Bryant, Mathoverflow, сообщено В. Львом) Доказать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ выполнено

$$\frac{\|f * f\|_2^2}{\|f * f\|_1 \|f * f\|_\infty} \le 1 - \varepsilon \,.$$

2. (В. Лев) Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — достаточно малое множество, то есть $|A| \le \alpha p$, $\alpha > 0$ — некоторая константа. Предположим, что

$$|2A| \le 2.4|A| - O(1)\,.$$

Тогда A содержится в арифметической прогрессии из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ длины не больше чем, $|2A| - |A| + 1$.

3. (С.В. Конягин) Пусть $P \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — арифметическая прогрессия. Доказать, что $P \neq AB$, $|A|, |B| \ge 2$.

4. (А. Шаркози, сообщена И.Д. Шкредовым) Пусть R — множество квадратичных вычетов в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Доказать, что $R \neq A + B$, $|A|, |B| \ge 2$.

5. (С.В. Конягин) Пусть $A, B \subseteq [1, 2, \dots, n]^d$, $n > 1$. Доказать, оптимальную оценку вида

$$\mathrm{E}(A, B) \ll_{\alpha,\beta} |A|^\alpha |B|^\beta \,,$$

где $\mathrm{E}(A, B)$ — аддитивная энергия множеств A и B, то есть количество решений уравнения $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, а константы α, β могут зависеть от n, но не от d.

6. (В. Лев) Пусть M — симметричная $0, 1$ матрица $n \times n$ и Δ — максимальное количество единиц в строчках (столбцах) M. Доказать, что найдется вектор $x \in \{0, 1\}^n$ такой, что

$$\|Mx\|_2 \gg \frac{\|M\| \|x\|}{\sqrt{\Delta + 1}}\,.$$

7. (Н.Г. Мощевитин) Пусть $1, \alpha_1, \alpha_2$ — линейно–независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда для некоторой последовательности $m_\nu = (m'_\nu, m''_\nu)$, $m'_\nu, m''_\nu \ge 0$ выполнено

$$\|m'_\nu \alpha_1 + m''_\nu \alpha_2\| \cdot (\max\{m'_\nu, m''_\nu\})^\Phi \to 0\,, \quad \nu \to \infty\,.$$

Какое Φ можно взять? Известно, что $\Phi \geq 2 - \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$.

8. (И.Д. Шкредов) Доказать, что любое подмножество $\mathbb{F}_3^n$ не содержащее решений уравнения $x + y + z = 0$, x, y, z — различные, имеет мощность меньше, чем $3^n/n^{1+c}$, где c — константа, например, $c = 10^{-6}$.

9. (А.Ю. Попов) Пусть $\mu(n)$ — функция Мебиуса. Верно ли, что $|\sum_{n \leq x} \mu(n)| \leq 2\sqrt{x}$? Опровергнуть, что $|\sum_{n \leq x} \mu(n)| = O(\sqrt{x})$.

10. (А.Ю. Попов) Доказать, что для некоторого $a \in (0, 1)$ выполнено

$$\int_{aX}^{X} |M(x)|\, dx \gg X^{3/2}\,.$$

Здесь $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$. Доказать, что

$$\int_{l(X)X}^{X} M^{\pm}(x)\, dx \gg X^{3/2}\,,$$

где $l(X)$ — убывающая к нулю функция такая, что $l(2X)/l(X) \to 1$.

11. (И.Д. Шкредов) Доказать полиномиальную гипотезу Фреймана–Рюжи в группе $\mathbb{F}_2^n$. Иными словами : для любого множества $A \subseteq \mathbb{F}_2^n$, $|A + A| \leq K|A|$ существует подмножество $A' \subseteq A$, $|A'| \geq |A|/K^C$ такое, что подпространство, натянутое на A' имеет размер $|A|K^C$. Здесь $C > 0$ — некоторая абсолютная константа.

12. (С.В. Конягин) Пусть $\Lambda \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ является Λ_p множеством по Рудину. Верно ли, что

$$\sum_x U(x)(U * \Lambda)(x) \ll |U|^{\alpha_p}\,,$$

где $\alpha_p > 1$ — абсолютная константа и $U \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ — произвольное множество?

13. (С.В. Конягин) Пусть I_1, I_2 — произвольные подинтервалы $\mathbb{F}_p^*$ длины h, $a \in \mathbb{F}_p^*$ и $g \in \mathbb{F}_p^*$ — некоторый элемент порядка $t \geq h$. Рассмотрим сравнение

$$x \equiv ag^z\,, \qquad x \in I_1,\, z \in I_2\,.$$

Тогда известно (Borgain–Konyagin–Garaev–Shparlinski), что число решений этого сравнения, не превосходит $h^{1/2}p^{o(1)}$, если $h < p^{2/5}$. Можно ли $2/5$ заменить на $1/2$?

14. (С.В. Конягин) Доказать, что для любого $u > 0$ найдется $v > 0$ такое, что для произвольных действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ найдется $a < e^{ut}$ и подинтервал $[0, 1)$ длины v такой, что точки $\{a\alpha_j\}$ в него не попадут.

15. (Н.Г. Мощевитин) Пусть $d_n = \int_0^1 ?(x)\cos 2\pi nx\,dx$. Верно ли, что $d_n \to 0$, $n \to \infty$? Здесь $?(x)$ — функция Минковского, см. опр., например, в http://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski's_question_mark_function.

16. (Н.Г. Мощевитин) Найти все неподвижные точки функции $?(x)$.

17. (Н.Г. Мощевитин) Оценить интеграл $\int_0^1 (?(x) - x)^2\,dx$.

18. (С.В. Конягин) Известно, что любой простой делитель нечетного совершенного числа x не превосходит $(3x)^{1/3}$. Можно ли улучшить показатель $1/3$?

19. (А.А. Приходько) Пусть $H = o(p/\log p)$. Найти распределение сумм мультипликативных характеров длины H, то есть сумм $\sum_{x=M+1}^{M+H} \chi(x)$.

20. (И.Д. Шкредов) Пусть $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ — максимальное множество без арифметических прогрессий длины k. Верно ли, что найдется множество S такое, что $A + S = \{1, 2, \ldots, N\}$ и $|S| = o(N/|A| \cdot \log|A|)$?

21. (О.Н. Герман) Гипотеза Оппенгейма для линейных форм. Пусть $n \geqslant 3$ и пусть $L_1, \ldots, L_n$ — линейно независимые линейные формы от n переменных. Пусть $\inf_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\vec{0}\}} |L_1(\vec{x}) \cdot \ldots \cdot L_n(\vec{x})| > 0$. Тогда решетка $\Big\{(L_1(\vec{x}), \ldots, L_n(\vec{x}))\Big|\vec{x} \in \mathbb{Z}^n\Big\}$ подобна по модулю действия группы диагональных матриц $n \times n$ решетке полного модуля чисто вещественного расширения $\mathbb{Q}$ степени n.

22. (О.Н. Герман) Пусть ξ — вещественное число, не являющееся алгебраическим степени $\leqslant n$. Тогда для любого сколь угодно малого положительного ε найдется бесконечно много наборов $(a_0, \ldots, a_n)$ неотрицательных целых чисел, таких что $\left|\sum_{k=0}^n a_k \xi^k\right| < (\max(a_0, \ldots, a_n))^{-n+\varepsilon}$.