I. C^*-АЛГЕБРЫ

В этой главе излагаются базисные сведения из теории банаховых алгебр. Основные определения, относящиеся к C^*-алгебрам, собраны в параграфе 1. Следующий параграф 2 посвящен C^*-модулям над C^*-алгебрами. Тензорные произведения C^*-алгебр и C^*-модулей рассматриваются в параграфе 3. Далее изучаются различные классы линейных операторов, действующих в C^*-модулях. Параграф 4 посвящен операторам А-конечного ранга и А-компактным операторам, в параграфе 5 рассматриваются проекторы и унитарные операторы. В качестве дополнения приводятся основные сведения, относящиеся к фредгольмовым (параграф 7) и неограниченным (параграф 8) операторам.

1. C^*-алгебры

Определение 1. *Банаховой алгеброй* называется ассоциативная алгебра A над полем $\mathbb{C}$, являющаяся одновременно полным нормированным пространством, в котором выполняются соотношения

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

для всех $a, b \in A$. Если алгебра A *унитальна*, т.е. содержит единицу $1 = 1_A$, то предполагается, что $\|1\| = 1$.

Определение 2. *Банаховой $*$-алгеброй* называется банахова алгебра A с *инволюцией*, задаваемой изометрическим антилинейным отображением $a \mapsto a^*$, обладающим следующими свойствами:

$$(a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^* a^*$$

для любых $a, b \in A$. Банахова $*$-алгебра A называется *C^*-алгеброй*, если она обладает дополнительным свойством:

$$\|a^2\| = \|a^* a\|$$

для всех $a \in A$.

Стандартным примером C^*-алгебры является алгебра $C(X)$ непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$ на компактном топологическом пространстве X (все рассматриваемые топологические пространства, рассматриваемые в этом обзоре, предполагаются хаусдорфовыми). Норма функции f равна

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Единицей в алгебре $C(X)$ служит функция $f \equiv 1$, а роль инволюции играет отображение: $f \mapsto f^*$, где $f^*(x) := \overline{f(x)}$. Алгебра $C(X)$ является коммутативной унитальной C^*-алгеброй.

Всякую неунитальную банахову алгебру A можно сделать унитальной, формально добавляя к ней единицу. Иначе говоря, можно расширить A до алгебры $A^+ := A \times \mathbb{C}$ с очевидными правилами сложения и умножения на комплексные числа, а также инволюцией. Произведение в A^+ вводится по правилу:

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu),$$

так что 1_{A^+} отождествляется с элементом $(0, 1)$. Норма элемента (a, λ) определяется как

$$\|(a, \lambda)\| := \sup_{\|b\| \leq 1} \{\|ab + \lambda b\|\}.$$

Построенная алгебра A^+ является унитальной C^*-алгеброй, если A есть C^*-алгебра.

Определение 3. *Спектром* $\mathrm{sp}(a)$ элемента a унитальной банаховой алгебры A называется множество комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1_A$ не обратим в A. Если алгебра A не унитальна, то спектр a состоит из комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1_{A^+}$ не обратим в A^+.

Приведем два важных свойства спектра элементов унитальной банаховой алгебры A, доказательство которых проводится также, как доказательство аналогичных свойств спектра ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве.

- Спектр $\mathrm{sp}(a)$ произвольного элемента $a \in A$ замкнут. Кроме того, он ограничен, точнее, содержится в круге $\{\lambda \in \mathbb{C}\, |\lambda| \leq \|a\|\}$, откуда следует, что $\mathrm{sp}(a)$ компактен.
- Спектр $\mathrm{sp}(a)$ произвольного элемента $a \in A$ непуст.

Определение 4. Элемент $a \in A$ банаховой *-алгебры A называется *самосопряженным* , если $a^* = a$.

Определение 5. Элемент $a \in A$, принадлежащий C^*-алгебре A, называется *положительным*, если он самосопряжен и его спектр $\mathrm{sp}(a)$ неотрицателен, т.е. принадлежит $[0, \infty)$.

Нетрудно показать, что элемент $a \in A$ является положительным тогда и только тогда, когда он представляется в виде $a = b^*b$ для некоторого элемента $b \in A$.

Пользуясь введенным определением, можно ввести на самосопряженных элементах C^*-алгебры A отношение частичного порядка.

Определение 6. Пусть a и b – самосопряженные элементы C^*-алгебры A. Будем говорить, что $a \leqslant b$, если элемент $b - a$ положителен.

Любой положительный элемент $a \in A$ удовлетворяет неравенству

$$0 \le a \le \|a\| \, 1_A,$$

поскольку $\mathrm{sp}(\|a\| \, 1_A - a) \subset [0, +\infty)$.

2. C^*-модули

Определение 7. (Правым) C^*-*предмодулем* над C^*-алгеброй A называется комплексное векторное пространство $\mathcal{E}$, являющееся одновременно правым A-модулем, наделенное полуторалинейным спариванием $(\cdot\,,\cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$, обладающим следующими свойствами:

(1) $(r, s+t) = (r,s) + (r,t)$;
(2) $(r, sa) = (r,s)\,a$;
(3) $(r,s) = (s,r)^*$;
(4) $(s,s) > 0$ для $s \neq 0$,

выполняющимися для любых $r, s, t \in \mathcal{E}$, $a \in A$.

Из этих свойств вытекает, что спаривание $(\cdot\,,\cdot)$ является A-линейным по второму аргументу, антилинейно по первому и положительно определено. В частности, $(ra, s) = a^*(r,s)$ для $a \in A$, $r, s \in \mathcal{E}$.

Введем на C^*-предмодуле $\mathcal{E}$ норму, полагая

$$\|s\|_{\mathcal{E}} := \sqrt{\|(s,s)\|}$$

для $s \in \mathcal{E}$. Здесь, $\|\cdot\|$ обозначает норму в C^*-алгебре A.

Приведем аналог неравенства Коши–Буняковского для введенной нормы. Пусть $\mathcal{E}$ есть C^*-предмодуль над C^*-алгеброй A. Тогда для любых $r, s \in \mathcal{E}$ выполняется неравенство

$$\|(r,s)\| \le \sqrt{\|(r,r)\|}\sqrt{\|(s,s)\|}.$$

Определение 8. C^*-предмодуль $\mathcal{E}$ называется C^*-*модулем*, если он является полным по норме $\|s\|_{\mathcal{E}}$.

В частности, пополнение произвольного C^*-предмодуля по норме $\|s\|_{\mathcal{E}}$ является C^*-модулем.

Приведем примеры C^*-модулей.

(1) Комплексное гильбертово пространство является C^*-модулем над алгеброй $\mathbb{C}$, в котором спаривание задается скалярным произведением.
(2) Любая C^*-алгебра A является C^*-модулем над собой со спариванием, задаваемым формулой: $(a, b) := a^* b$.

(3) Свободный A-модуль A^n, составленный из вектор-столбцов с компонентами из A, является C^*-модулем над A со спариванием элементов $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$ и $b = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$, задаваемым формулой: $(a, b) := (a_1^*, \ldots, a_n^*)\, {}^t(b_1, \ldots, b_n) = a_1^* b_1 + \ldots + a_n^* b_n$.

(4) Свободный A-модуль ${}^nA$, составленный из вектор-строк с компонентами из A, является C^*-модулем над $\mathrm{Mat}_n(A)$ со спариванием элементов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$, задаваемым формулой: $(a, b) := {}^t(a_1^*, \ldots, a_n^*)(b_1, \ldots, b_n) = (a_i^* b_j)_{i,j=1}^n$.

3. Тензорные произведения

Начнем с тензорного произведения гильбертова пространства $\mathcal{H}$ на C^*-алгебру A (все гильбертовы пространства, рассматриваемые в этом обзоре, предполагаются комплексными и сепарабельными). *Алгебраическим тензорным произведением* $\mathcal{H} \odot A$ называется правый A-модуль, элементами которого являются конечные суммы простых тензоров вида

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \odot a_k,$$

где $\xi_k \in \mathcal{H}$, $a_k \in A$. Оно наделяется A-значным спариванием, задаваемым на простых тензорах формулой

$$(\xi \odot a, \eta \odot b) = (\xi, \eta) a^* b,$$

где $a, b \in A$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Это спаривание удовлетворяет всем свойствам, перечисленным в определении 7, и в частности, положительно определено. Тем самым, $\mathcal{H} \odot A$ является C^*-предмодулем над A. Его пополнение по норме, индуцированной введенным спариванием, является C^*-модулем над A, который обозначается через $\mathcal{H} \otimes A$ и называется *тензорным произведением* гильбертова пространства $\mathcal{H}$ на C^*-алгебру A.

Введем C^*-модуль $\mathcal{H}_A \equiv \ell^2_A$ над C^*-алгеброй A, состоящий из последовательностей $a = \{a_k\}$ элементов из A, для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* a_k$$

сходится в A. Наделим его полуторалинейным спариванием вида

$$(a, b) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* b_k.$$

Примером операторов, действующих в $\mathcal{H}_A$, могут служить операторы P_n, задаваемые формулой

$$P_n(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots) = (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots),$$

которые являются, очевидно, ортогональными проекторами в $\mathcal{H}_A$, т.е. $P_n^2 = P_n$ и $P_n^* = P_n$. При этом $\|\xi - P_n\xi\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\xi \in \mathcal{H}$.

Перейдем к построению тензорного произведения C^*-модулей. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ есть унитальные кольца (т.е. кольца с единицей) и $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – унитальный (т.е. переводящий $1_\mathcal{A}$ в $1_\mathcal{B}$) гомоморфизм. Построим функтор E_φ из категории правых $\mathcal{A}$-модулей в категорию правых $\mathcal{B}$-модулей, который определяется следующим образом.

Пусть $\mathcal{E}$ есть правый $\mathcal{A}$-модуль. Тогда кольцо $\mathcal{B}$ можно наделить структурой левого $\mathcal{A}$-модуля, полагая: $a \cdot b := \varphi(a)b$. Это позволяет нам построить тензорное произведение

$$E_\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes_\mathcal{A} \mathcal{B}$$

правого $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{E}$ на кольцо $\mathcal{B}$ относительно гомоморфизма φ.

А именно, $\mathcal{E} \otimes_\mathcal{A} \mathcal{B}$ – это абелева группа, элементами которой являются конечные суммы вида

$$\sum_{k=1}^{n} s_k \otimes b_k,$$

где $s_k \in \mathcal{E}$, $b_k \in \mathcal{B}$, с единственным соотношением

$$(sa) \otimes b = s \otimes \varphi(a)b$$

для любого $a \in \mathcal{A}$.

Введем теперь правое действие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{E} \otimes_\mathcal{A} \mathcal{B}$, полагая:

$$(s \otimes b)c := s \otimes (bc)$$

для всех $s \in \mathcal{E}$, $b, c \in \mathcal{B}$. Если $\mathcal{F}$ – другой правый $\mathcal{A}$-модуль и $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ есть $\mathcal{A}$-линейное отображение, то $E_\varphi(\tau) := \tau \otimes \mathrm{id}_\mathcal{B}$ является $\mathcal{B}$-линейным отображением из $\mathcal{E} \otimes_\mathcal{A} \mathcal{B}$ в $\mathcal{F} \otimes_\mathcal{A} \mathcal{B}$, т.е. E_φ действительно является функтором из категории правых $\mathcal{A}$-модулей в категорию правых $\mathcal{B}$-модулей.

Теперь мы можем перейти к определению тензорного произведения произвольных C^*-алгебр. Начнем с тензорного проризведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Рассмотрим алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$, элементами которого являются конечные суммы простых тензоров вида

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \odot \eta_k.$$

На пространстве $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ можно ввести структуру предгильбертова пространства со спариванием, задаваемым на простых тензорах формулой

$$(\xi_1 \odot \eta_1, \xi_2 \odot \eta_2) := (\xi_1, \xi_2)(\eta_1, \eta_2),$$

где $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_1$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}_2$.

Это спаривание положительно определено и мы называем *тензорным произведением* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ пополнение $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ по норме, порождаемой указанным спариванием. Заметим, что введенная норма обладает *перекрестным свойством*, которое записывается для простых тензоров $\xi \otimes \eta \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ в виде

$$\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

В случае банаховых пространств E_1,E_2 алгебраическое тензорное произведение $E_1 \odot E_2$ может допускать несколько различных норм, обладающих перекрестным свойством, приводящим к разным пополнениям.

Перейдем к определению тензорного произведения C^*-модулей и начнем с конструкции тензорного произведения C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A на другую C^*-алгебру B, обобщающей введенный ранее функтор E_φ.

Пусть задан морфизм C^*-алгебр $\varphi : A \to B$. Определим тензорное произведение $E_\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes_A B$. Для этого рассмотрим алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{E} \odot B$ над $\mathbb{C}$ и введем на нем B-значное спаривание, задаваемое на простых тензорах $s \odot b$ формулой

$$(s \odot b, t \odot c) := b^*(s, r),$$

где $s, t \in \mathcal{E}$, $b, c \in B$. У такого спаривания, однако, есть ядро и для того, чтобы ввести норму на $\mathcal{E} \odot B$, необходимо вначале профакторизовать $\mathcal{E} \odot B$ по этому ядру. Указанное ядро имеет вид

$$N := \{z \in \mathcal{E} \odot B : \ (z, z) = 0\}$$

и порождается элементами вида $sa \odot b - s \odot \varphi(a)b$. Переходя к фактор-пространству $(\mathcal{E} \odot B)/N$, получим на нем положительно определенное спаривание, которое на простых тензорах $s \otimes b \in (\mathcal{E} \odot B)/N$ задается формулой

$$(s \otimes b, t \otimes c) = b^* \varphi((s, t))c.$$

Тем самым, фактор $(\mathcal{E} \odot B)/N$ является C^*-предмодулем над алгеброй B, а его пополнение по норме, порождаемой введенным спариванием, является C^*-модулем, обозначаемым $E_\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes_A B$ и называемым *тензорным произведением* C^*-модуля $\mathcal{E}$ на C^*-алгебру B

Тензорное произведение C^*-модулей определяется по той же схеме. Пусть заданы C^*-алгебры A,B и правые C^*-модули $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ над алгебрами A и B соответственно. Пусть, кроме того, задан морфизм $\rho : A \to \mathrm{End}_B \mathcal{F}$.

Наделим алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{E} \odot \mathcal{F}$, являющееся правым B-модулем, спариванием, задаваемым на простых тензорах формулой

$$(s_1 \odot t_1, s_2 \odot t_2) = (t_1, \rho\left((s_1, s_2)\right) t_2) = (\rho\left((s_2, s_1)\right) t_1, t_2),$$

где $s_1, s_2 \in \mathcal{E}$, $t_1, t_2 \in \mathcal{F}$. Рассмотрим снова B-подмодуль в $\mathcal{E} \odot \mathcal{F}$, состоящий из элементов $z \in \mathcal{E} \odot \mathcal{F}$ таких, что $(z, z) = 0$. Этот подмодуль порождается элементами вида $sa \odot t - s \odot \rho(a)t$.

Введенное спаривание определяет на факторе $(\mathcal{E}\odot\mathcal{F})/N$ положительно определенное скалярное произведение. Пополнение $(\mathcal{E}\odot\mathcal{F})/N$ по норме, порождаемой этим скалярным произведением, является C^*-модулем, обозначаемым через $\mathcal{E}\otimes_\rho\mathcal{F}=\mathcal{E}\otimes_A\mathcal{F}$ и называется *тензорным произведением* C^*-модуля $\mathcal{E}$ на C^*-модуль $\mathcal{F}$.

4. Операторы A-конечного ранга и A-компактные операторы

Операторы ранга 1, действующие из C^*-модуля $\mathcal{E}$ в C^*-модуль $\mathcal{F}$, называются *кетбра-операторами* и обозначаются через $|r\rangle\langle s|$, где $s\in\mathcal{E}$, $r\in\mathcal{F}$. Оператор $|r\rangle\langle s|$ действует по формуле

$$|r\rangle\langle s|:\ t\longmapsto r(s,t),$$

где $t\in\mathcal{E}$. Он является A-линейным, поскольку $r(s,ta)=r(s,t)a$ для $a\in A$, и допускает сопряжение, причем $(|r\rangle\langle s|)^*=|s\rangle\langle r|$.

В случае, когда $\mathcal{E}=\mathcal{F}$, композиция двух кетбра-операторов

$$|r\rangle\langle s|\circ|t\rangle\langle u|=|r\rangle(s,t)\langle u|=|r\rangle\langle u(t,s)|$$

является снова кетбра-оператором, так что конечные суммы кетбра-операторов образуют алгебру операторов, действующих в $\mathcal{E}$. Эта алгебра является двусторонним идеалом в алгебре $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$, который обозначается через $\mathrm{Fin}_A\mathcal{E}$, а его замыкание по операторной норме — через $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$.

Более общим образом, мы обозначаем через $\mathrm{Fin}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ пространство операторов вида

$$\sum_{k=1}^{n}|r_k\rangle\langle s_k|,$$

называемых иначе операторами *A-конечного ранга*. Замыкание $\mathrm{Fin}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ по операторной норме обозначается через $\mathcal{K}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$, а его элементы называются *A-компактными операторами*.

Заметим, что A-компактный оператор не обязан быть компактным в обычном смысле.

Пример 1. Для любой унитальной C^*-алгебры A имеет место изоморфизм

$$\mathcal{K}_A(A)\cong A.$$

Действительно, отображение $T\mapsto T(1_A)$ задает биекцию алгебры ограниченных линейных операторов на алгебру A. Далее, любое отображение вида $a\mapsto b^*a$, совпадающее на самом деле с кетбра-оператором $|1_A\rangle\langle b|$, допускает сопряжение и имеет конечный A-ранг. Поэтому $\mathcal{K}_A(A)\cong A$.

Пример 2. Аналогичным образом доказывается, что

$$\mathcal{K}_A(A^n)\cong\mathrm{Mat}_n(A).$$

Задача 1. Для алгебры $A = \mathcal{C}(M)$, где M – компактное многообразие, а $E \to M$ – эрмитово векторное расслоение. Покажите, что имеет место изоморфизм

$$\mathcal{K}_A(\Gamma(M, E)) \cong \Gamma(M, \operatorname{End} E).$$

Введем еще одну важную C^*-алгебру, ассоциированную с C^*-алгеброй A. Рассмотрим алгебру, являющуюся тензорным произведением $\mathcal{K} \otimes A$ алгебры компактных операторов $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, на C^*-алгебру A. Напомним, что $\mathcal{K} \otimes A$ является пополнением алгебраического тензорного произведения $\mathcal{K} \odot A$ по единственной C^*-норме, обладающей перекрестным свойством:

$$\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

Определение 9. Тензорное произведение $A_S := \mathcal{K} \otimes A$ называется *стабилизацией* C^*-алгебры A. C^*-алгебра A называется *стабильной*, если $A_S \cong A$. Две C^*-алгебры A и B называются *стабильно эквивалентными*, если $A_S \cong B_S$.

5. Проекторы и унитарные операторы

Пусть $\mathcal{F}$ есть замкнутый подмодуль в C^*-модуле $\mathcal{E}$. Допустим, что у $\mathcal{F}$ имеется ортогональное дополнение $\mathcal{F}^\perp$ такое, что $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp \cong \mathcal{E}$. Тогда любой элемент $s \in \mathcal{E}$ будет однозначно записываться в виде

$$s = t + u,$$

где $t \in \mathcal{F}$, $u \in \mathcal{F}^\perp$, а отображение $s \mapsto t$ будет задавать проектор $p \in \operatorname{End}_A \mathcal{E}$ с областью значений $\mathcal{F}$.

Обратно, если $p \in \operatorname{End}_A \mathcal{E}$ является проектором, то ортогональное дополнение к $\operatorname{Im} p$ существует и совпадает с

$$(\operatorname{Im} p)^\perp = \operatorname{Im}(1_{\mathcal{E}} - p) = \operatorname{Ker} p.$$

Тем самым, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между дополняемыми C^*-подмодулями в $\mathcal{E}$ и областями значений проекторов из $\operatorname{End}_A \mathcal{E}$.

Определение 10. Пусть A есть унитальная C^*-алгебра. Тогда A-компактные проекторы в $\mathcal{H}_A$ образуют подмножество в C^*-алгебре A_S, обозначаемое через $\mathcal{P}(A_S)$, которое является замкнутым подмножеством в единичном шаре алгебры A_S.

Примерами операторов из $\mathcal{P}(A_S)$ могут служить проекторы вида

$$P_n = \sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j|,$$

где $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (с 1 на j-м месте).

Рассмотрим модули вида pA^n, где p – проектор в $\operatorname{Mat}_n(A)$.

Предложение 1. *Если p – проектор в $Mat_n(A)$, то pA^n является C^*-модулем над алгеброй A, причем*

$$\mathcal{K}_A(pA^n) \cong p\,Mat_n(A)p.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{Fin}_A(pA^n) \longrightarrow p\,\mathrm{Mat}_n(A)p,$$

которое переводит кетбра-оператор вида $|pa\rangle\langle pb|$ в матрицу с (i,j)-компонентами, равными

$$\sum_{k,l} p_{ik}a_k b_l^* p_{lj}.$$

Это отображение является изометрическим $*$-изоморфизмом, который продолжается до изоморфизма $\mathcal{K}_A(pA^n)$ на $p\,\mathrm{Mat}_n(A)p$. □

Определение 11. Пусть $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ есть ограниченный A-линейный оператор, действующий из C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A в C^*-модуль $\mathcal{F}$ над той же алгеброй. Оператор T *допускает сопряжение*, если существует A-линейный оператор $T^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, называемый оператором, *сопряженным* к T, такой что

$$(r, Ts) = (T^*r, s)$$

для всех $s \in \mathcal{E}$, $r \in \mathcal{F}$.

Сопряженный оператор определяется единственным образом и $T^{**} = T$. Однако не любой ограниченный A-линейный оператор, действующий в C^*-модуле, допускает сопряжение. Причина в том, что не любой замкнутый подмодуль $\mathcal{F}$ в C^*-модуле $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A допускает ортогональное дополнение $\mathcal{G}$ такое, что $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \mathcal{E}$.

Поэтому требование существования сопряженного оператора приходится накладывать дополнительно. Именно, будем обозначать через $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ векторное пространство ограниченных A-линейных операторов $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, допускающих сопряжение. При $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ мы обозначаем через $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})$ алгебру ограниченных A-линейных эндоморфизмов $\mathcal{E}$, допускающих сопряжение.

Определение 12. *Унитарным оператором* $U : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, действующим из C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A в C^*-модуль $\mathcal{F}$ над той же алгеброй, называется отображение $U \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ такое, что

$$U^*U = 1_{\mathcal{E}},\ UU^* = 1_{\mathcal{F}}.$$

Если такой оператор существует, то C^*-модули $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ называются *унитарно эквивалентными.*

Одним из наиболее важных свойств C^*-алгебр является то, что алгебры операторов над ними также являются C^*-алгебрами.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{E}$ – (правый) C^*-модуль над C^*-алгеброй A. Тогда алгебра $End_A\mathcal{E}$ ограниченных A-линейных операторов на $\mathcal{E}$, допускающих сопряжение, также является C^*-алгеброй.*

Доказательство. Норма в алгебре $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$ определяется равенством

$$\|T\| = \sup_{\|s\|\le 1} \|Ts\|,$$

где $s \in \mathcal{E}$. По неравенству Коши-Буняковского

$$\|Ts\|^2 = \|(s, T^*Ts)\| \le \|s\| \cdot \|T^*Ts\| \le \|T^*T\| \cdot \|s\|^2,$$

откуда

$$\|T\|^2 \le \|T^*T\| \le \|T^*\| \cdot \|T\|,$$

т.е. $\|T\| \le \|T^*\|$ и, следовательно, $\|T\| = \|T^*\|$, поскольку $T^{**} = T$. Тем самым,

$$\|T\|^2 \le \|T^*T\| \le \|T\|^2 \Longrightarrow \|T^*T\| = \|T\|^2,$$

т.е. $\|\cdot\|$ является C^*-нормой.

Для доказательства полноты пространства $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$ заметим, что если задана последовательность Коши $\{T_n\}$, состоящая из операторов, допускающих сопряжение, то она сходится к некоторому ограниченному линейному оператору T. По доказанному, последовательность сопряженных операторов $\{T_n^*\}$ также является последовательностью Коши и потому сходится к некоторому ограниченному линейному оператору S. Так как

$$(r, Ts) = \lim_n (r, T_n s) = \lim_n (T_n^* r, s) = (Sr, s)$$

для всех $r, s \in \mathcal{E}$, то оператор T допускает сопряжение и сопряженный к нему оператор совпадает с S. Это доказывает полноту пространства $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$. $\square$

Следствие 1. *Алгебра $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$, состоящая из A-компактных операторов, действующих в C^*-модуле $\mathcal{E}$, является C^*-алгеброй и двусторонним идеалом в алгебре $End_A\mathcal{E}$.*

В частности, алгебра $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(\mathcal{H})$, состоящая из компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$.

6. Конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала

Определение 13. Линейный функционал $\varphi : A \to \mathbb{C}$ называется *положительным*, если $\varphi(a) \geqslant 0$ для любого положительного элемента $a \in A$ или, эквивалентно, $\varphi(b^*b) \ge 0$ для любого элемента $b \in A$.

Если алгебра A унитальна, то любой положительный функционал φ на ней является ограниченным, причем $\|\varphi\| = \varphi(1_A)$. Обратно, любой линейный ограниченный функционал на такой алгебре, обладающий свойством: $\|\varphi\| = \varphi(1_A)$, обязательно положителен.

Определение 14. Положительный линейный функционал φ на C^*-алгебре A называется *состоянием*, если его норма равна 1: $\|\varphi\| = 1$. Состояние называется *следом*, если $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ для любых $a, b \in A$.

Множество состояний является выпуклым множеством, т.е. для любых состояний φ, ψ на алгебре A их выпуклая линейная комбинация $t\varphi + (1-t)\psi$ с $t \in [0,1]$ также является состоянием.

Определение 15. Состояние φ называется *чистым*, если оно не представляется в виде выпуклой линейной комбинации других состояний, т.е. если φ не представляется в виде суммы $\varphi = t\psi_1 + (1-t)\psi_2$, где ψ_1, ψ_2 – состояния на A, отличные от φ, $t \in (0,1)$.

Пример 3. Рассмотрим в качестве примера состояния на алгебре $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Положительные элементы a в алгебре $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ имеют вид: $a = (a_1, a_2)$, где $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$. Поэтому состояния на алгебре $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ задаются функционалами вида

$$\varphi(a) = \varphi_1 a_1 + \varphi_2 a_2, \quad \text{где } \varphi_1 \geq 0,\ \varphi_2 \geq 0,\ \varphi_1 + \varphi_2 = 1.$$

Еще один пример — состояния на алгебре $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Положительные элементы a в алгебре $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ имеют вид:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & c \\ \bar{c} & a_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_1 + a_2 \geq 0,\ c \in \mathbb{C},\ a_1 a_2 - |c|^2 \geq 0$$

(выписанные неравенства означают, иными словами, что оба собственных значения матрицы a неотрицательны). Эти элементы составляют конус в пространстве $\mathbb{R}^4$. Линейные функционалы, неотрицательные на этом конусе, образуют двойственный конус, а состояния на рассматриваемой алгебре (с условием $\varphi(1) = 1$) образуют шар в $\mathbb{R}^3$. Из них чистыми являются состояния вида $\psi^* a \psi$, где $\psi \in \mathbb{C}^2$, $\|\psi\| = 1$. Вложение $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, задаваемое формулой

$$(a_1, a_2) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

индуцирует отображение состояний на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ в состояния на $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Докажите, что единственное состояние на алгебре $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, являющееся следом, имеет вид $\mathrm{Tr}\, a/2$.

ГНС-конструкция позволяет построить по любому состоянию φ на C^*-алгебре A $*$-представление π_φ алгебры A в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$.

Указанное представление задается гомоморфизмом A в алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi)$ ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}_\varphi$.

Перейдем к подробному описанию *ГНС-конструкции.*

Определим положительно полуопределенную (возможно, вырожденную) полуторалинейную форму на A вида

$$(a, b)_\varphi = \varphi(a^* b).$$

Она линейна по второму аргументу и антилинейна по первому. Кроме того, эта форма удовлетворяет неравенству Коши–Буняковского

$$|(a, b)_\varphi|^2 \leqslant (a, a)_\varphi (b, b)_\varphi.$$

Построенная форма вырождена на элементах левого идеала

$$N_\varphi := \{a \in A : \ (a, a)_\varphi = 0\} = \{b \in A : \ \varphi(a^* b) = 0 \text{ для всех } a \in A\}.$$

Рассмотрим фактор-пространство A/N_φ, элементами которого являются классы $[a] := a + N_\varphi$. Определим на нем скалярное произведение по формуле

$$([a], [b])_\varphi := (a, b)_\varphi.$$

Это скалярное произведение корректно определено на A/N_φ и невырождено (проверьте это!).

Введем теперь гильбертово пространство $\mathcal{H}_\varphi$ как пополнение пространства A/N_φ по норме, порождаемой указанным скалярным произведением.

Определим представление π_φ алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$ по формуле:

$$\pi_\varphi(a) : [b] \longmapsto [ab].$$

Построенный оператор $\pi_\varphi(a)$ ограничен на A/N_φ, при этом $\|\pi_\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$. Более того, построенное представление является $*$-гомоморфизмом, т.е. $\pi_\varphi(a^*) = (\pi_\varphi(a))^*$, где $(\pi_\varphi(a))^*$ – оператор, эрмитово сопряженный к $\pi_\varphi(a)$.

Поскольку оператор $\pi_\varphi(a)$ ограничен на плотном в $\mathcal{H}_\varphi$ подпространстве A/N_φ, то он продолжается до ограниченного линейного оператора (обозначаемого той же буквой $\pi_\varphi(a)$), заданного на всем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$ и удовлетворяющего оценке: $\|\pi_\varphi(a)\| \leq \|a\|$.

Задача 2. Покажите, что построенное представление π_φ неприводимо тогда и только тогда, когда состояние φ является чистым.

Произвольную C^*-алгебру можно вложить в алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в некотором гильбертовом пространстве согласно следующей теореме Гельфанда–Наймарка.

Теорема 1 (Гельфанд–Наймарк)**.** *Любая C^*-алгебра A изоморфна замкнутой подалгебре в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ линейных ограниченных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Идея доказательства. Пользуясь теоремой Хана–Банаха, можно показать, что для любого элемента $a \in A \setminus \{0\}$ существует состояние φ_a такое, что

$$\varphi_a(a^*a) = \|a\|^2.$$

Тогда из равенства (**??**) вытекает, что $\|\pi_\varphi(a)\xi\|_\varphi = \|a\|$. Отсюда следует, что $\pi_\varphi(a)$ может обращаться в нуль только при $a = 0$.

Теперь рассмотрим представление π, равное прямой сумме ГНС-представлений, отвечающих всевозможным φ_a:

$$\pi := \bigoplus_{\varphi_a : a \in A} \pi_{\varphi_a}.$$

Указанное представление действует в пространстве

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\varphi_a : a \in A} \mathcal{H}_{\varphi_a}.$$

Так как $\|\pi_{\varphi_a}\| = \|a\|$ для любого $a \in A$, то выполняется равенство $\|\pi(a)\| = \|a\|$, т.е. представление π – изометрическое, что доказывает теорему. □

7. Дополнение. Фредгольмовы операторы

Обратимся к алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Идеал $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ будет в дальнейшем играть роль множества инфинитезимальных элементов в этой алгебре. Поэтому представляет интерес изучение т.н. *алгебры Калкина*

$$Q(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Заметим, что два оператора $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеют один и тот же образ в алгебре $Q(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда $S = T + K$ для некоторого компактного оператора K.

Предложение 3. *Ограниченный линейный оператор $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет обратимый образ в алгебре $Q(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда существует оператор $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такой, что операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ компактны. Последнее условие эквивалентно тому, что образ $\mathrm{Im}\, F$ замкнут, а ядро $\mathrm{Ker}\, F$ и коядро $\mathrm{Coker}\, F$ оператора F конечномерны.*

Доказательство. Первая эквивалентность очевидна. Для доказательство второй предположим, что существует оператор $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такой, что операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ компактны. Допустим, что мы уже доказали замкнутость $\mathrm{Im}\, F$ и покажем, что ядро $\mathrm{Ker}\, F$ конечномерно. Заметим, что $\mathrm{Ker}\, F$ инвариантно относительно оператора $1 - GF$, поскольку

$$(1 - GF)\xi = \xi - GF\xi = \xi$$

для $\xi \in \operatorname{Ker} F$. То же самое верно и для единичного шара в пространстве $\operatorname{Ker} F$, совпадающего, тем самым, с образом компактного оператора $1 - GF$. Из компактности этого шара вытекает конечномерность $\operatorname{Ker} F$.

Докажем теперь замкнутость $\operatorname{Im} F$. Для этого выберем оператор R конечного ранга, такой что

$$\|(1 - GF) - R\| < 1/2.$$

Для $\xi \in \operatorname{Ker} R$ будем иметь

$$\|\xi\| - \|\xi - GF\xi\| \le \|GF\xi\| \le \|G\| \cdot \|F\xi\|.$$

С другой стороны,

$$\|\xi\| - \|\xi - GF\xi\| \ge \|\xi\| - \frac{1}{2}\|\xi\| = \frac{1}{2}\|\xi\|,$$

т.е.

$$\frac{1}{2}\|\xi\| \le \|G\| \cdot \|F\xi\|.$$

Отсюда

$$\|F\xi\| \ge \frac{\|\xi\|}{2\|G\|}$$

и, следовательно, сужение оператора F на $\operatorname{Ker} R$ имеет замкнутый образ. Но подпространство $(\operatorname{Ker} R)^\perp = \operatorname{Im} R^*$ конечномерно, поскольку оператор R имеет конечный ранг. Поэтому пространство

$$\operatorname{Im} F = F(\operatorname{Ker} R) + F((\operatorname{Ker} R)^\perp)$$

замкнуто.

Для доказательства конечномерности коядра $\operatorname{Coker} F$ заметим, также как и выше, что пространство $\operatorname{Ker} F^*$ инвариантно относительно оператора $(1 - FG)^* = 1 - G^* F^*$, откуда вытекает его конечномерность. Но

$$\operatorname{Coker} F = \mathcal{H}/\operatorname{Im} F \cong \operatorname{Ker} F^*,$$

поэтому оно также конечномерно.

Обратно, если образ $\operatorname{Im} F$ замкнут, а подпространства $\operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Coker} F$ конечномерны, то мы можем построить искомый оператор G, полагая

$$\begin{cases} G(F\xi) = \xi & \text{для } \xi \in (\operatorname{Ker} F)^\perp, \\ G(\eta) = 0 & \text{для } \xi \in (\operatorname{Im} F)^\perp \cong \operatorname{Ker} F^*. \end{cases}$$

Действительно, этот оператор корректно определен, поскольку отображение $F : (\operatorname{Ker} F)^\perp \to \operatorname{Im} F$ биективно. Кроме того, операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ имеют конечный ранг и потому компактны. $\square$

Определение 16. Ограниченный линейный оператор $F : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ из гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$ называется *фредгольмовым*, если его образ $\operatorname{Im} F$ замкнут, а пространства $\operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Coker} F$ конечномерны. *Индекс фредгольмова оператора* F по определению равен

$$\operatorname{Ind} F = \dim \operatorname{Ker} F - \dim \operatorname{Coker} F.$$

При $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ пространство фредгольмовых операторов $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обозначается через $\mathrm{Fred} = \mathrm{Fred}(\mathcal{H})$ и наделяется топологией равномерной сходимости из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Оно является мульпликативной полугруппой (см. свойство 2 ниже).

Свойства индекса:

(1) Отображение $\operatorname{Ind} : \mathrm{Fred} \to \mathbb{Z}$ непрерывно.

(2) Отображение Ind является полугрупповым гомоморфизмом, т.е.

$$\operatorname{Ind}(F_1F_2) = \operatorname{Ind} F_1 + \operatorname{Ind} F_2.$$

(3) Значение индекса не меняется при компактных возмущениях, т.е.

$$\operatorname{Ind}(F + K) = \operatorname{Ind} F$$

для любого $K \in \mathcal{K}$.

(4) $\operatorname{Ind} F = 0 \iff F$ является компактным возмущением обратимого оператора.

(5) Стандартный оператор правого сдвига в пространстве ℓ^2 фредгольмов и его индекс равен -1.

(6) $\operatorname{Ind} F = \dim \operatorname{Ker}(F^*F) - \dim \operatorname{Ker}(FF^*)$.

(7) $\operatorname{Ind} F^* = -\operatorname{Ind} F$.

8. Дополнение. Неограниченные операторы

Под неограниченным оператором мы понимаем линейный оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, областью определения которого является подпространство $D(T)$ в H, а множеством значений – подпространство $\operatorname{Im} T \subset H$. Как правило, будет предполагаться, что область определения $D(T)$ плотна в H.

Пример 4. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$ и $D(T)$ есть подпространство функций $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{R}} t^2|\varphi(t)|^2 dt < \infty.$$

Определим оператор T на множестве $D(T)$ равенством

$$(T\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Этот оператор неограничен в H, но корректно определен на подпространстве $D(T)$.

Пример 5. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$ и $D(T) = S(\mathbb{R})$ есть пространство Шварца быстро убывающих функций на прямой, состоящее из функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^M \frac{d^N}{dt^N}\varphi(t) \right| < \infty$$

для всех $M, N \in \mathbb{Z}_+$. Определим оператор T равенством

$$(T\varphi)(t) = -\varphi''(t) + t^2\varphi(t).$$

Оператор T корректно определен на подпространстве $S(\mathbb{R})$. Функции Эрмита

$$\varphi_n(t) = c_n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2},$$

где $c_n = (-1)^n \pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2}$ – нормировочные константы, принадлежат $S(\mathbb{R})$ и образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$. Они являются собственными функциями оператора T:

$$(T\varphi_n)(t) = (2n+1)\varphi_n(t)$$

с собственными значениями, растущими с ростом n. Поэтому оператор T неограничен в $L^2(\mathbb{R})$.

Определение 17. *Графиком* линейного оператора T называется множество

$$\Gamma(T) = \{(u, Tu) : \ u \in D(T)\},$$

которое является линейным подпространством в $H \times H$. Оператор T называется *замкнутым*, если его график $\Gamma(T)$ является замкнутым подпространством в $H \times H$.

По теореме о замкнутом графике оператор T ограничен, если он замкнут и его область определения $D(T)$ совпадает со всем пространством H.

Определение 18. Пусть S и T – линейные операторы в H. Будем говорить, что оператор S является *расширением* оператора T (обозначение: $T \subset S$), если $D(T) \subset D(S)$ и $Tv = Sv$ для всех $v \in D(T)$. Это условие эквивалентно тому, что $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$.

Определение 19. Оператор T *допускает замыкание*, если он имеет замкнутое расширение. В этом случае существует наименьшее замкнутое расширение оператора T, которое называется *замыканием* T и обозначается через $\overline{T}$.

Предложение 4. *Если оператор T допускает замыкание, то*

$$\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}.$$

Прежде, чем переходить к доказательству предложения, заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Предположим, что S – замкнутое расширение оператора T, т.е. $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$. Введем оператор R, областью определения которого является множество

$$D(R) = \{u \in H: \ (u,v) \in \overline{\Gamma(T)} \text{ для некоторого } v \in H\},$$

а сам оператор задается формулой: $v := Ru$. Это определение корректно. Действительно, если условие $(u,v) \in \overline{\Gamma(T)}$ выполняется одновременно для двух разных $v_1, v_2 \in H$, то, полагая $v := v_1 - v_2$, получим, что вектор $(0,v) \in \overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$. Что возможно только при $v = 0$. Поскольку $\Gamma(R) = \overline{\Gamma(T)}$, то R является замкнутым расширением T. Ввиду произвольности S отсюда следует, что $R \subset S$ для любого замкнутого расширения S, т.е. R – замыкание T. □

К обычным операциям над неограниченными операторами нужно относиться с осторожностью, проверяя их корректную определенность. Например, область определения суммы двух неограниченных операторов S и T есть $D(S+T) = D(S) \cap D(T)$, так что

$$(S+T)u = Su + Tu \quad \text{при } u \in D(S+T).$$

Аналогично, $D(ST) = \{u \in D(T): \ Tu \in D(S)\}$ и

$$(ST)u = S(Tu) \quad \text{при } u \in D(ST).$$

Пусть T – линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда естественно ввести область определения $D(T^*)$ как подпространство, состоящее из тех $v \in H$, для которых линейный функционал (Tu,v) непрерывен по $u \in D(T)$. Если вектор v обладает этим свойством, то по теореме Хана–Банаха функционал (Tu,v) продолжается до непрерывного линейного функционала на H, который по теореме Рисса представляется в виде

$$(Tu,v) = (u,f) \tag{1}$$

для некоторого вектора $f \in H$. Условие непрерывности функционала (Tu,v) на $D(T)$ можно записать в виде неравенства

$$|(Tu,v)| \le C\|u\|,$$

которое должно выполняться для всех $u \in D(T)$. Заметим, что вектор f в формуле (1) определяется единственным образом только при условии плотности области определения $D(T)$ в H.

Теперь мы готовы дать следующее

Определение 20. Пусть T – линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(T)$. Обозначим через $D(T^*)$ подпространство в H, состоящее из всех векторов $v \in H$, для которых существует вектор $f \in H$ такой, что

$$(Tu,v) = (u,f) \quad \text{для всех } u \in D(T).$$

Определим *оператор* T^**, сопряженный к оператору* T, по формуле: $T^*v = f$.

Заметим, что область определения сопряженного оператора $D(T^*)$ вполне может оказаться неплотной в H. Приведем пример, демонстрирующий подобное явление.

Пример 6. Пусть f – ограниченная измеримая функция на вещественной оси $\mathbb{R}$, не принадлежащая $L^2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$D(T) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) : \int |f(t)\varphi(t)|dt < \infty\}.$$

Тогда $D(T)$ содержит, в частности, все функции из $L^2(\mathbb{R})$ с компактными носителями, поэтому $D(T)$ плотна в $L^2(\mathbb{R})$.

Фиксируем произвольную функцию $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ и рассмотрим оператор

$$T\varphi = (\varphi, f)\varphi_0 \quad \text{для } \varphi \in D(T).$$

Тогда для функций $\psi \in D(T^*)$ будем иметь

$$(\varphi, T^*\psi) = (T\varphi, \psi) = ((\varphi, f)\varphi_0, \psi) = (\varphi, f)(\varphi_0, \psi) = (\varphi, (\psi, \varphi_0)f)$$

для всех $\varphi \in D(T)$. Тем самым, $T^*\psi = (\psi, \varphi_0)f$. Так как функция f не принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, то оператор T^* корректно определен только на векторах ψ с $(\psi, \varphi_0) = 0$, т.е. область определения $D(T^*)$ ортогональна φ_0 и заведомо не плотна в H. На самом деле, она совпадает с ортогональным дополнением к φ_0, а оператор T^* на этой области равен нулю.

Имеются примеры, в которых $D(T^*) = \{0\}$.

В том случае, когда область определения $D(T^*)$ плотна в H, можно ввести оператор $T^{**} := (T^*)^*$. В его терминах можно описать замыкание оператора T.

Предложение 5. *Пусть T – линейный оператор в H с плотной областью определения $D(T)$. Тогда:*

1. *оператор T^* замкнут;*
2. *оператор T допускает замыкание тогда и только тогда, когда область определения $D(T^*)$ плотна в H; в этом случае $\overline{T} = T^{**}$;*
3. *если оператор T допускает замыкание, то $(\overline{T})^* = T^*$.*

Доказательство. Введем на пространстве $H \times H$ унитарный оператор V по формуле

$$V(u, v) = -(v, u)$$

и докажем *первое утверждение* предложения. Из унитарности оператора V следует, что

$$V(E^\perp) = V(E)^\perp$$

для любого подпространства $E \subset H \times H$ (проверьте!). Поэтому для $(u,v) \in H \times H$ будем иметь

$$(u,v) \in V(\Gamma(T)^\perp) \Longleftrightarrow (u,v) \perp V(\Gamma(T)),$$

т.е.

$$((u,v),(-Tw,w)) = 0 \tag{2}$$

для всех $w \in D(T)$. Учитывая, что скалярное произведение на $H \times H$ задается формулой

$$((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = (u_1,u_2) + (v_1,v_2),$$

получим из соотношения (2), что

$$(u,Tw) = (v,w) \quad \text{для всех } w \in D(T). \tag{3}$$

Итак, условие $(u,v) \perp V(\Gamma(T))$ равносильно соотношению (3), которое означает, что $(u,v) \in \Gamma(T^*)$. Тем самым,

$$\Gamma(T^*) = V(\Gamma(T))^\perp.$$

Отсюда следует, что график $\Gamma(T^*)$ замкнут, будучи ортогональным дополнением к линейному подпространству.

Докажем *второе утверждение* предложения. Пользуясь тем, что график $\Gamma(T)$ является линейным подпространством в $H \times H$, получим

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma(T)} = \left(\Gamma(T)^\perp\right)^\perp = \left(V^2\Gamma(T)^\perp\right)^\perp \\ = \left(V(V\Gamma(T))^\perp\right)^\perp \text{ (как показано выше)} = \left(V\Gamma(T^*)\right)^\perp.\end{aligned}$$

Если область определения $D(T^*)$ плотна, то можно ввести оператор T^{**}, график которого, как показано в первом пункте доказательства, есть

$$\Gamma(T^{**}) = V(\Gamma(T^*))^\perp = \overline{\Gamma(T)},$$

откуда следует, что оператор T допускает замыкание и $\overline{T} = T^{**}$.

Допустим, напротив, что область определения $D(T^*)$ не плотна в H и выберем вектор $v \neq 0$, ортогональный $D(T^*)$. Это означает, иными словами, что $(0,v) \in \Gamma(T^*)^\perp$, т.е. подпространство $\Gamma(T^*)^\perp = V(\Gamma(T^*)^\perp)$ не может быть графиком никакого линейного оператора. Поскольку $\overline{\Gamma(T)} = (V(\Gamma(T^*))^\perp$, то это означает, что оператор T не допускает замыкания.

Для доказательства *третьего утверждения* заметим, что если оператор T допускает замыкание, то

$$T^* = \overline{T^*} = T^{***} = (\overline{T})^*.$$

$\square$

Докажем еще одно свойство, относящееся к сопряжению произведения неограниченных операторов с плотными областями определения.

Предложение 6. *Пусть S, T и ST – линейные операторы в H с плотными областями определения. Тогда*

$$(T^*S^*) \subset (ST)^*.$$

Если оператор S ограничен, то $T^*S^* = (ST)^*$.

Доказательство. Пусть $u \in D(ST)$ и $v \in D(T^*S^*)$. Тогда

$$(Tu, S^*v) = (u, T^*S^*v),$$

поскольку $u \in D(T)$ и $S^*v \in D(T^*)$. Кроме того,

$$(STU, v) = (Tu, S^*v),$$

поскольку $Tu \in D(S)$ и $v \in D(S^*)$. Поэтому

$$(STu, v) = (u, T^*S^*v),$$

откуда следует первое утверждение предложения.

Если оператор S ограничен, то его сопряженный S^* также ограничен и $D(S^*) = H$. Поэтому если $v \in D((ST)^*)$, то

$$(Tu, S^*v) = (STu, v) = (u, (ST)^*v)$$

для всех $u \in D(ST)$. Следовательно, $S^*v \in D(T^*)$ и потому $v \in D(T^*S^*)$. Таким образом, $D((ST)^*) \subset D(T^*S^*)$, откуда, с учетом первого утверждения предложения, вытекает и его второе утверждение. $\square$

Определение 21. Пусть T – замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H. Комплексное число λ принадлежит *резольвентному множеству* $\rho(T)$, если оператор $\lambda I - T$ является биекцией $D(T) \to H$ с ограниченным обратным оператором. При $\lambda \in \rho(T)$ оператор

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$$

называется *резольвентой* оператора T в точке λ. Дополнение к $\rho(T)$ называется *спектром* $\sigma(T)$ оператора T.

Замечание 1. Определения точечного и остаточного спектра, данные выше для ограниченных операторов, переносятся на случай неограниченных операторов без изменений.

Теорема 2 (теорема о резольвенте)**.** *Пусть T – замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(T)$. Тогда $\rho(T)$ есть открытое подмножество комплексной плоскости, на котором резольвента является аналитической операторной функцией. Более того, семейство операторов $\{R_\lambda(T) : \ \lambda \in \rho(T)\}$ состоит из попарно коммутирующих ограниченных операторов, удовлетворяющих соотношению*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы о резольвенте для ограниченных операторов. □

Прежде, чем привести пример вычисления резольвенты неограниченного оператора, напомним определение абсолютно непрерывных функций.

Определение 22. Линейный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *симметрическим*, если $T \subset T^*$, т.е. $D(T) \subset D(T^*)$ и $Tu = T^*u$ для всех $u \in D(T)$. Отсюда следует, что

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \text{для всех } u, v \in D(T).$$

Оператор T называется *самосопряженным*, если $T = T^*$, т.е. T – симметрический и $D(T) = D(T^*)$.

Симметрические операторы всегда допускают замыкание, поскольку $D(T^*) \supset D(T)$ и, следовательно, область определения $D(T^*)$ плотна в H. Если T симметричен, то оператор T^* является замкнутым расширением T, поэтому замыкание $\overline{T}$, совпадающее с T^{**}, должно содержатся в T^*, т.е. для симметрического оператора T имеют место включения

$$T \subset T^{**} \subset T^*,$$

а для замкнутого симметрического оператора – соотношение

$$T = T^{**} \subset T^*.$$

Для самосопряженного оператора T все указанные расширения совпадают, т.е. $T = T^{**} = T^*$.

Самосопряженные операторы в классе всех симметрических операторов можно охарактеризовать следующим свойством.

Определение 23. Симметрический оператор T в гильбертовом пространстве H называется *максимальным симметрическим*, если любое его симметрическое расширение S совпадает с T. Иначе говоря, если S симметричен и $S \supset T$, то $S = T$.

Предложение 7. *Самосопряженные операторы являются максимальными симметрическими операторами.*

Доказательство. Пусть оператор T самосопряжен и S – его симметрическое расширение, т.е. $S \subset S^*$ и $T \subset S$. Тогда $S^* \subset T^*$, откуда $S \subset S^* \subset T^*$. Но $T^* = T \subset S$, поэтому $S = T$. □

Теорема 3 (критерий самосопряженности)**.** *Пусть T – симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор T самосопряжен;*

(2) *оператор* T *замкнут и ядро* $\mathrm{Ker}(T^* \pm iI) = 0$*;*
(3) *образ* $\mathrm{Im}(T \pm iI) = 0$ *замкнут и совпадает с* H*.*

Доказательство. Докажем сначала импликацию (1) $\Longrightarrow$ (2). Предположим, что T – самосопряженный оператор и существует вектор $u \in D(T^*) = D(T)$ такой, что $T^*u = iu$. Тогда также $Tu = iu$ и

$$i(u,u) = (iu,u) = (Tu,u) = (u,T^*u) = (u,Tu) = -i(u,u),$$

откуда $u = 0$. Аналогичным образом доказывается, что уравнение $T^*u = -iu$ не имеет ненулевых решений.

Перейдем к импликации (2) $\Longrightarrow$ (3). Так как уравнение $T^*u = -iu$ не имеет ненулевых решений, то множество $\mathrm{Im}(T - iI)$ должно быть плотно в H. Действительно, иначе существовал бы ненулевой вектор $v \in \mathrm{Im}(T - iI)^{\perp}$, удовлетворяющий соотношению

$$((T - iI)u, v) = 0 \quad \text{для всех } u \in D(T),$$

откуда следовало бы, что $v \in D\left[(T - iI)^*\right]$ и

$$(T - iI)^*v = (T^* + iI)v = 0.$$

Последнее невозможно, поскольку уравнение $(T^*+iI)v = 0$ по условию не имеет ненулевых решений.

Зная, что подпространство $\mathrm{Im}(T-iI)$ плотно в H, для доказательства утверждения (3) нужно показать, что это подпространство замкнуто в H. Но при любом $u \in D(T)$ справедливо соотношение

$$\|(T - iI)u\|^2 = \|u\|^2 + \|Tu\|^2 + (iu,Tu) + (Tu,iu) = \|u\|^2 + \|Tu\|^2 \tag{4}$$

в силу симметричности T. Поэтому если последовательность $u_n \in D(T)$ обладает тем свойством, что $(T - iI)u_n \to v$, то последовательности $\{u_n\}$ и $\{Tu_n\}$ также сходятся. Из замкнутости T вытекает, что в этом случае $u_n \to u$ для некоторого вектора $u \in D(T)$ и $(T - iI)u = v$, т.е. подпространство $\mathrm{Im}(T - iI)$ замкнуто в H. Аналогично доказывается, что $\mathrm{Im}(T + iI) = H$.

Импликация (3) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $u \in D(T^*)$. Так как $\mathrm{Im}(T - iI) = H$, то найдется вектор $v \in D(T)$ такой, что

$$(T - iI)v = (T^* - iI)u.$$

Но $D(T) \subset D(T^*)$, поэтому $u - v \in D(T^*)$ и

$$(T^* - iI)(u - v) = 0.$$

Так как $\mathrm{Im}(T+iI) = H$, то $\mathrm{Ker}(T^*-iI) = \{0\}$, откуда $u = v \in D(T)$. Тем самым, мы показали, что $D(T^*) \subset D(T) \Longrightarrow D(T^*) = D(T)$, т.е. T самосопряжен. $\square$

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по K-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[10] Г.Г.Каспаров, Операторный K-функтор и расширения C*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[11] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[12] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[13] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[14] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[15] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[16] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.

[17] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.

[18] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.

[19] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.

[20] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.

[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.