II. K-ТЕОРИЯ

В этой главе излагаются основы K-теории. Вначале в параграфе 1 вводится K_0-группа. Затем в параграфе 2 напоминается конструкция Гротендика, позволяющая построить каноническим образом по любой унитальной коммутативной полугруппе абелеву группу. K_1-группа вводится в параграфе 3 и определяются высшие K-группы C^*-алгебры A.

1. K_0-группа

Введем на множестве проекторов $\mathcal{P}(A_S)$ в C^*-алгебре A следующее отношение эквивалентности.

Определение 1. Два проектора $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ называются *эквивалентными*, если

$$q = upu^* = upu^{-1}$$

для некоторого унитарного оператора $u \in \operatorname{End}_A \mathcal{H}_A$.

Обозначим через

$$V(A) := \mathcal{P}(A_S)/\sim$$

фактор пространства $\mathcal{P}(A_S)$ по введенному отношению эквивалентности.

Предложение 1. *Множество $V(A)$ является унитальной коммутативной полугруппой.*

Доказательство. Определим прямую сумму проекторов $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ по формуле

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

и зададим сложение в $V(A)$ как

$$[p] + [q] = [p \oplus q].$$

Оно корректно определено, поскольку

$$upu^{-1} \oplus vqv^{-1} = (u \oplus v)(p \oplus q)(u^{-1} \oplus v^{-1})$$

для унитарных элементов $u, v \in \operatorname{End}_A \mathcal{H}_A$. Далее,

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

т.е. указанная полугруппа коммутативна. Роль нуля в этой полугруппе играет нулевой класс $[0]$. $\square$

2. Конструкция Гротендика

По любой унитальной коммутативной полугруппе S можно каноническим образом построить коммутативную группу K, называемую *группой Гротендика* полугруппы S. Эта группа, заданная вместе с унитальным полугрупповым гомоморфизмом $\vartheta : S \to K$, обладает следующим универсальным свойством: если G – другая коммутативная группа, заданная вместе с унитальным полугрупповым гомоморфизмом $\gamma : S \to G$, то существует единственный групповой гомоморфизм $\kappa : K \to G$ такой, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "\kappa"] & G \\ S \arrow[u, "\vartheta"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\gamma = \kappa \circ \vartheta$.

Группа K определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Построить ее можно следующим образом. Рассмотрим на множестве $S \times S$ следующее отношение эквивалентности:

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow \text{существует } z \in S \text{ такое, что } x + y' + z = x' + y + z.$$

Тогда группа K определяется как $K = S \times S/ \sim$, а гомоморфизм ϑ задается формулой: $\vartheta(x) := [x, 0]$, так что $[x, y] = \vartheta(x) - \vartheta(y)$ в группе K.

Определение 2. *K_0-группой* унитальной C^*-алгебры A называется группа Гротендика $K_0(A)$ полугруппы $V(A)$.

Любой элемент из $K_0(A)$ представляется в виде $[p] - [q]$, где проекторы $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$. Пусть $\varphi : A \to B$ есть унитальный морфизм C^*-алгебр. Обозначим через $K_0\varphi : K_0(A) \to K_0(B)$ отображение, задаваемое формулой

$$K_0\varphi : [p] - [q] \longrightarrow [\varphi(p)] - [\varphi(q)].$$

Предложение 2. *Соответствие*

$$(A, \varphi) \longmapsto (K_0(A), K_0\varphi)$$

задает ковариантный функтор из категории унитальных C^*-алгебр в категорию абелевых групп.

Пример 1. $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

Действительно, $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$, поскольку все проекторы в $\mathcal{P}(\mathbb{C}_S)$ имеют конечный ранг, который является их единственным инвариантом.

Пример 2. Аналогично, $K_0(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.

Задача 1. K_0-группа $K_0(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве равна нулю.

Перечислим некоторые важные свойства K_0-функтора.

(1) *стабильность*: $K_0(A_S) = K_0(A)$.
(2) *полуточность*: K_0 переводит короткие точные последовательности вида $0 \to J \to A \to B \to 0$ в последовательности
$$K_0(J) \to K_0(A) \to K_0(B),$$
точные в среднем члене.
(3) *K_0 коммутирует с индуктивными пределами.*

3. K_1-группа

Определим K_1-группу C^*-алгебры A как
$$K_1(A) = [\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), A_S],$$
где для локально компактного топологического пространства X пространство $C_0(X)$ состоит из непрерывных функций на X, обращающихся в нуль на бесконечности (подумайте, как его определить). Иными словами, $K_1(A)$ есть пространство гомотопических классов непрерывных гомоморфизмов $C_0(\mathbb{R}) \to A_S$. Это определение можно также переписать в виде
$$[C_0(\mathbb{R}), A_S] \cong [C(\mathbb{T}), A_S^+]_+,$$
где $\mathbb{T}$ есть единичная окружность, A_S^+ обозначает унитализацию алгебры A_S, а $[\cdot, cdot]_+$ обозначает множество гомотопических классов непрерывных отображений топологических пространств с отмеченными точками.

Заметим далее, что C^*-алгебра $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ порождается единственным унитарным элементом $t \mapsto e^{it}$. Поэтому гомоморфизм из $K_1(A) \cong [\mathcal{C}(\mathbb{T}), A_S^+]_+$ определяется выбором унитарного элемента в $A_S^+ = (\mathcal{K} \otimes A)^+$. Следовательно, мы можем отождествить $K_1(A)$ с группой $\pi_0(\mathrm{U}(A_S^+))$ компонент связности унитарной группы $\mathrm{U}(A_S^+)$.

Пользуясь тем, что $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \varinjlim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, мы можем переписать последнее определение $K_1(A)$ в виде
$$K_1(A) = \varinjlim \mathrm{U}_n(A)/\mathrm{U}_n(A)^0 = \varinjlim \mathrm{GL}_n(A)/\mathrm{GL}_n(A)^0,$$
где $\mathrm{U}_n(A)$ обозначает подгруппу в $\mathrm{Mat}_n(A)$, состоящую из унитарных элементов, а $\mathrm{U}_n(A)^0$ – связную подгруппу единицы в $\mathrm{U}_n(A)$.

Пример 3. $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

Этот факт вытекает из связности группы $\mathrm{U}(\mathcal{K}^+)$.

Пример 4. Аналогично, $K_1(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = 0$.

Умножение в группе $K_1(A)$ задается формулой:

$$[u]\cdot[v]=[uv]=\left[\begin{pmatrix}u&0\\0&v\end{pmatrix}\right],$$

где второе равенство и коммутативность умножения вытекают из цепочки гомотопий

$$\begin{pmatrix}uv&0\\0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}u&0\\0&v\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}v&0\\0&u\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}vu&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы дать еще одно, эквивалентное определение группы $K_1(A)$ введем понятие *надстройки* над C^*-алгеброй A. Так называется C^*-алгебра вида

$$\Sigma A := A\otimes C_0(\mathbb{R})\cong C_0(\mathbb{R},A).$$

Теорема 1 (Теорема периодичности Ботта)**.** *Группа $K_1(A)$ изоморфна группе $K_0(\Sigma A)$, а группа $K_0(A)$ изоморфна группе $K_1(\Sigma A)$.*

Можно было бы ввести K-*группы порядка* n для C^*-алгебры A, полагая

$$K_n(A):=K_0(\Sigma^n A).$$

По *теореме периодичности Ботта* для любой C^*-алгебры A и любого натурального n имеют место изоморфизмы

$$K_{2n}(A)\cong K_0(A),\quad K_{2n+1}(A)\cong K_1(A),$$

однако ввиду теоремы периодичности Ботта имеет смысл изучать еолько группы $K_0(A)$ и $K_1(A)$.

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по К-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[10] Г.Г.Каспаров, Операторный K-функтор и расширения C*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[11] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[12] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[13] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[14] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[15] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[16] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.

[17] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.

[18] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.

[19] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.

[20] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.

[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.