III. НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В этой главе излагаются исходные определения, относящиеся к некоммутативной геометрии. Центральным из них является понятие спектральной тройки, которое вводится в параграфе 1. В приложениях важную роль играют гладкие спектральные тройки, определяемые в том же параграфе. Параграф 3 посвящен фредгольмовым модулям и их связи со спектральными тройками. В параграфе 4 строится индексное отображение, задающее спаривание между спектральными тройками и K-функтором. В параграфе 5 дается определение K-функтора Каспарова $KK(A,B)$. Дополнение 6 посвящено идеалам в алгебре компактных операторов и следу Диксмье.

1. Спектральные тройки

Определение 1. *Спектральная тройка* $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ состоит из $*$-алгебры $\mathcal{A}$, наделенной представлением $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$ в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и самосопряженного оператора $D:\operatorname{Dom}D\to\mathcal{H}$ с плотной областью определения $\operatorname{Dom}D$ в $\mathcal{H}$, обладающего следующими свойствами:

(1) Коммутатор $[D,\pi(a)]$ корректно определен на $\operatorname{Dom}D$ и продолжается до ограниченного линейного оператора на $\mathcal{H}$ для любого $a\in\mathcal{A}$;
(2) Оператор $\pi(a)(1+D^2)^{-1/2}$ компактен для любого $a\in\mathcal{A}$.

Определение 2. *Оператором градуировки* на $\mathbb{Z}_2$-градуированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$ называется ограниченный линейный оператор γ на $\mathcal{H}$ с $\gamma^2=1$, так что $\mathcal{H}_0$ (соотв. $\mathcal{H}_1$) есть собственное подпространство γ с собственным значением $+1$ (соотв. -1).

Определение 3. Если на пространстве $\mathcal{H}$ из определения спектральной тройки 1 задан оператор градуировки γ, коммутирующий со всеми $\pi(a)$, $a\in\mathcal{A}$, и антикоммутирующий с D, будем называть такую спектральную тройку *четной*. В противном случае она называется *нечетной*.

В дальнейшем мы будем обозначать $\pi(a)$ просто через a.

2. Гладкие спектральные тройки

Определение 4. $*$-Алгебра $\mathcal{A}$ называется *гладкой*, если она является алгеброй Фреше, т.е. полна, метризуема и операция умножения на ней является непрерывной. Кроме этого, должно выполняться следующее условие: алгебра $\mathcal{A}$ должна быть изоморфна собственной плотной $*$-подалгебре $i(\mathcal{A})$ в C^*-алгебре

A, где $i : \mathcal{A} \to A$ –вложение, причем алгебра $i(\mathcal{A})$ должна быть замкнута относительно голоморфного функционального исчисления. Последнее означает, что если функция f голоморфна в окрестности спектра элемента $a \in i(\mathcal{A})$, то $f(a) \in i(\mathcal{A})$.

Предложение 1. *Если $\mathcal{A}$ – гладкая подалгебра в C^*-алгебре A, то отображение вложения i индуцирует изоморфизм $i_* : K_j(\mathcal{A}) \to K_j(A)$, $j = 0, 1$.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [19].

Определение 5. Рассмотрим оператор

$$\delta(T) = [(1 + D^2)^{1/2}, T]$$

с областью определения $\operatorname{Dom}\delta$. Будем говорить, что спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ является *бесконечно гладкой* (принадлежит классу QC^∞), если

$$\mathcal{A}, [D, \mathcal{A}] \in \bigcap_{n\geq 0} \operatorname{Dom}\delta^n.$$

Предложение 2. *Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ является бесконечно гладкой спектральной тройкой. Обозначим через $\mathcal{A}_\delta$ пополнение $\mathcal{A}$ в топологии, задаваемой полунормами*

$$q_n(a) = \|\delta^n(a)\| + \|\delta^n([D, a])\|, \ n \geq 0.$$

Тогда $(\mathcal{A}_\delta, \mathcal{H}, D)$ также является бесконечно гладкой спектральной тройкой, а $\mathcal{A}_\delta$ – гладкой алгеброй.

Для дальнейшего нам понадобится понятие локальной алгебры.

Определение 6. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}_c$ обладает *локальными единицами*, если для любого конечного набора элементов $\{a_i\}_{i=1}^n$ из этой алгебры найдется $\phi \in \mathcal{A}_c$ такое, что

$$\phi a_i = a_i \phi = a_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *локальной*, если она является алгеброй Фреше и в ней имеется плотный идеал $\mathcal{A}_c \subset \mathcal{A}$, обладающий локальными единицами.

В этих терминах можно определить понятие суммируемых спектральных троек с помощью идеалов Шэттена $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ и Диксмье $\mathcal{L}^{p,\infty}(\mathcal{H})$ (см. дополнение).

3. Фредгольмовы модули

Определение 7. *Нечетным фредгольмовым модулем* над C^*-алгеброй A называется инволютивное представление σ алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, наделенное линейным ограниченным *оператором симметрии* F таким, что $F^2 = 1$, $F^* = F$ и выполняется условие

$$[F, \sigma(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \quad \text{для всех } a \in A.$$

Четный фредгольмов модуль задается представлением $\sigma = \sigma_0 \oplus \sigma_1$ C^*-алгебры A в $\mathbb{Z}_2$-градуированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ с нечетным оператором симметрии F, удовлетворяющим условиям, наложенным на него в нечетном случае.

Наряду с фредгольмовыми модулями, часто рассматриваются *фредгольмовы предмодули*, которые определяются также, как в определении 7, только вместо условий $F^2 = 1$, $F^* = F$ требуется, чтобы

$$\sigma(a)(F^2 - 1),\ \sigma(a)(F - F^*) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \quad \text{для всех } a \in A.$$

По каждому фредгольмову предмодулю можно построить каноническим образом фредгольмов модуль (см. [8], п.8.2).

Связь между спектральными тройками и фредгольмовыми модулями устанавливается следуюшим предложением.

Предложение 3. *Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ есть спектральная тройка и алгебра A есть C^*-замыкание алгебры $\mathcal{A}$. Предположим, что оператор F_D*

$$F_D = D(1 + D^2)^{-1/2}$$

ограничен. Тогда $(A, \mathcal{H}, F_D)$ есть фредгольмов модуль.

Доказательство этого предложения можно найти в статье [4]. Здесь мы приведем только его идею. Заметим, что из условий компактности оператора $a(1 + D^2)^{-1/2}$ и самосопряженности оператора D вытекает, что оператор

$$a(1 - F_D^2) = (1 + D^2)^{-1}$$

компактен для любого $a \in A$ и $F_D^* = F_D$. Остается доказать, что все операторы вида $[F_D, a]$ компактны для всех $a \in A$. Достаточно показать, что это условие выполняется для всех a из плотной подалгебры $\mathcal{A}$. Последнее утверждение доказывается с помощью резольвентного представления для степеней $(1 + D^2)^{-s}$ вида

$$(1 + D^2)^{-s} = \frac{\sin(8\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-s}(1 + \lambda + D^2)^{-1} d\lambda.$$

4. Индекс

Определение 8. Для заданного $\mu > 0$ определим *дубль* спектральной тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ как спектральную тройку $(\mathcal{A}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, D_\mu)$, где

$$D_\mu = \begin{pmatrix} D & \mu \\ \mu & -D \end{pmatrix}$$

и положим

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $a \in \mathcal{A}$. Если на $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ задана градуировка γ, то на дубле ей будет соответствовать градуировка $\hat{\gamma} = \gamma \oplus (-\gamma)$.

Пусть $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ есть унитализация алгебры $\mathcal{A}$. Продолжим действие матричной алгебры $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}^+)$ на дубль $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \otimes \mathbb{C}^n$, полагая для $b \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}^+)$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \pi(b) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathcal{H}),$$

где $\pi : \mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}^+) \to \mathrm{Mat}_n(C)$ – отображение проекции, задаваемое унитализацией.

Начнем с определения индекса в нечетном случае.

Определение 9. Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ есть нечетная спектральная тройка и u – унитарная матрица из $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}^+)$, представляющая класс $[u] \in K_1(\mathcal{A})$. Положим

$$F_\mu = D_\mu |D_\mu|^{-1}, \quad P_\mu = \frac{1 + F_\mu}{2}.$$

Тогда *отображение индекса*, отвечающее спектральной тройке $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, сопоставляет классу $[u]$ индекс фредгольмова оператора по формуле

$$\text{Индекс}_{(\mathcal{A},\mathcal{H},D)}([u]) = \mathrm{Ind}((P_\mu \otimes 1_n)\hat{u}(P_\mu \otimes 1_n)).$$

Задача 1. Докажите, что это определение корректно, т.е. оператор $(P_\mu \otimes 1_n)\hat{u}(P_\mu \otimes 1_n)$ является фредгольмовым.

В четном случае определение 9 модифицируется следующим образом.

Определение 10. Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, \gamma)$ есть четная спектральная тройка и e – проектор из $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}^+)$, представляющий класс $[e] \in K_0(\mathcal{A})$. Положим

$$P = \frac{1 + \hat{\gamma}}{2}, \ P^\perp = 1 - P, \ (F_\mu)_+ = P^\perp F_\mu P.$$

Тогда *отображение индекса*, отвечающее четной спектральной тройке $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, \gamma)$, сопоставляет классу $[e]$ индекс фредгольмова оператора по формуле

$$\text{Индекс}_{(\mathcal{A},\mathcal{H},D,\gamma)}([e] - [1_e]) = \mathrm{Ind}((\hat{e}(F_\mu \otimes 1_n)\hat{e})_+).$$

Задача 2. Покажите, что оператор $(\hat{e}(F_\mu \otimes 1_n)\hat{e})_+$ является фредгольмовым.

5. Фредгольмова K-теория

Определение 11. Пусть A и B – две $\mathbb{Z}_2$-градуированные C^*-алгебры. *AB-модуль* Каспарова $(A, {}_\phi E_B, F)$ задается следующими данными:

(1) E_B – счетно-порожденный $\mathbb{Z}_2$-градуированный B-правый C^*-модуль;
(2) $\phi : A \to \mathrm{End}_B E$ – $\mathbb{Z}_2$-градуированный $*$-гомоморфизм:

(3) $F \in \mathrm{End}_B E$ – нечетный оператор, такой что

$$\phi(a)(1-F^2), \phi(a)(F-F^*), [F,\phi(a)]_\pm \in \mathcal{K}_B(E),$$

для всех $a \in A$, где $[\cdot,\cdot]_\pm$ есть градуированный коммутатор $[T,S]_\pm = TS - (-1)^{|T||S|}ST$.

Определение 12. Два AB-модуля Каспарова $(A, {}_{\phi_1}E^1_B, F_1)$ и $(A, {}_{\phi_2}E^2_B, F_2)$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует четный унитарный морфизм $U : E^1_B \to E^2_B$, такой что

$$F_2 = UF_1U^*, \quad \phi_2(a) = U\phi_1(a)U^*$$

для всех $a \in A$.

Эти модули называются *операторно гомотопными*, если $E^1 = E^2 = E$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ и существует непрерывная по норме гомотопия (F_t), $t \in [t_1, t_2]$, такая, что $F_{t_1} = F_1$, $F_{t_2} = F_2$ и $(A, {}_\phi E_B, F_t)$ является AB-модулем Каспарова для всех $t \in [t_1, t_2]$. Например, если $F_2 = F_1 + K$, где K – компактный оператор, то $F_t = F_1 + tK$, $t \in [0,1]$, есть операторная гомотопия из F_1 в F_2.

Наконец, AB-модуль Каспарова $(A, {}_\phi E_B, F)$ называется *вырожденным*, если

$$\phi(a)(1-F^2) = \phi(a)(F-F^*) = [F,\phi(a)] = 0$$

для всех $a \in A$.

Определение 13. Два AB-модуля Каспарова (A, E^1_B, F_1) и (A, E^2_B, F_2) называются *эквивалентными*, если существует операторная гомотопия из (A, E^1_B, F_1) в $(A, E^1_B, \tilde{F}_1)$ такая, что модуль $(A, E^1_B, \tilde{F}_1)$ унитарно эквивалентен модулю $(A, E^2_B, F_2) \oplus D$, где D – вырожденный AB-модуль Каспарова.

Определение 14. Множество $KK(A,B)$ есть множество классов эквивалентности AB-модулей Каспарова относительно отношения эквивалентности из предыдущего определения.

Теорема 1 ([11])**.** *Множество $KK(A,B)$ является абелевой группой с операцией сложения, задаваемой прямой суммой.*

Теорема 2 ([11])**.** *$KK(\cdot,\cdot)$ является функтором из категории C^*-алгебр в категорию абелевых групп, который контравариантен по первой переменной и ковариантен по второй. Этот функтор гомотопически инвариантен и стабилен.*

Предложение 4. *Если алгебра A наделена тривиальной градуировкой, то $KK(\mathbb{C}, A) \cong K_0(A)$.*

Докажите это предложение самостоятельно.

Операция надстройки, определяемая с помощью комплексной клиффордовой алгебры $\mathbb{C}l_n$, позволяет ввести высшие KK-группы.

Определение 15. $KK^n(A,B) = KK(A \otimes \mathbb{C}l_n, B)$.

Для высших KK-групп справедлива теореме о периодичности

$$KK^{2n}(A,B) \cong KK(A,B), \quad KK^{2n+1}(A,B) \cong KK(A \otimes \mathbb{C}l_1, B).$$

6. Дополнение. Идеалы в алгебре компактных операторов и суммируемые спектральные тройки

Пусть T есть компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $|T| = \sqrt{T^*T}$. Обозначим через $\{\mu_n(T)\}$ последовательность *сингулярных чисел* (s-чисел) оператора T, задаваемых собственными числами оператора $|T|$, упорядоченными по убыванию:

$$\mu_0(T) \geq \mu_1(T) \geq \dots,$$

так что $\mu_n(T) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 16. Пусть T есть компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем говорить, что T принадлежит пространству $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $1 \leq p < \infty$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p < \infty.$$

Пространство $\mathcal{L}^p$ является идеалом в алгебре $\mathcal{K}$ компактных операторов и в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$. Нас будет особенно интересовать класс $\mathcal{L}^1$ *ядерных операторов*, наделенный нормой

$$\|T\|_1 := \mathrm{Tr}|T| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, Tu_n),$$

где $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. (Заметим, что это определение не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathcal{H}$.)

Введем величину, которая играет важную роль в последующем:

$$\sigma_N(T) := \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T).$$

По-другому, ее можно определить как

$$\sigma_N(T) = \sup_E \{\|TP_E\|_1 : \dim E = N\},$$

где P_E – ортогональный проектор на подпространство E, а верхняя грань достигается снова на подпространстве E_N, порожденном первыми N собственными векторами оператора T.

Из последнего определения вытекает, что σ_N удовлетворяет неравенству треугольника
$$\sigma_N(T_1+T_2)\le\sigma_N(T_1)+\sigma_N(T_2)$$
и, следовательно, является нормой на $\mathcal{K}$.

Приведем еще одно определение этой величины, которое будет использовано впоследствии.
$$\sigma_N(T)=\inf\{\|R\|_1+N\|S\|:\ R,S\in\mathcal{K},R+S=T\}.$$
Это позволяет распространить определение функции σ_N как функции натурального параметра N на произвольные неотрицательные значения $\lambda\in[0,\infty)$, полагая
$$\sigma_\lambda(T)=\inf\{\|R\|_1+\lambda\|S\|:\ R,S\in\mathcal{K},R+S=T\}.$$

Можно показать, что функция $\sigma_\lambda(T)$ обладает следующими свойствами:

(1) функция $\sigma_\lambda(T)$ кусочно линейна и выпукла; более того, если $\lambda=N+t$ с $0\le t<1$, так что $N=[\lambda]$, то
$$\sigma_\lambda(T)=(1-t)\sigma_N(T)+t\sigma_{N+1}(T);$$
(2) $\sigma_\lambda(S+T)\le\sigma_\lambda(S)+\sigma_\lambda(T)$;

(3) если операторы S,T положительны, то
$$\sigma_{\lambda+\mu}(S+T)\ge\sigma_\lambda(S)+\sigma_\mu(T).$$

Из двух последних свойств вытекает, что имеет место неравенство, выполняющееся для произвольных компактных положительных операторов S,T:
$$\sigma_\lambda(S+T)\le\sigma_\lambda(S)+\sigma_\lambda(T)\le\sigma_{2\lambda}(S+T). \tag{1}$$
Это свойство субаддитивности функционала $\sigma_\lambda(T)$ на конусе положительных компактных операторов сыграет важную роль при определении следа Диксмье.

Помимо идеалов $\mathcal{L}^p$ введем еще интерполяционные идеалы $\mathcal{L}^{p,q}$.

Определение 17. Определим $\mathcal{L}^{p,q}=\mathcal{L}^{p,q}(\mathcal{H})$ при $1<p<\infty$, $1\le q<\infty$, как интерполирующее пространство между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}^1$. А именно, будем говорить, что оператор $T\in\mathcal{L}^{p,q}$, если
$$\sum_{N=1}^{\infty}N^{(\alpha-1)q-1}\sigma_N(T)^q<\infty\,,$$
где $\alpha=1/p$. Дополним это определение при $q=\infty$, полагая, что $T\in\mathcal{L}^{p,\infty}$, если последовательность чисел $\{N^{\alpha-1}\sigma_N(T)\}_{N=1}^{\infty}$ ограничена.

Предложение 5. *Каждое из введенных пространств $\mathcal{L}^{p,q}$ является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{K}$ компактных операторов. При $p_1<p_2$ и при $p_1=p_2$, $q_1<q_2$ имеются включения*
$$\mathcal{L}^{p_1,q_1}\subset\mathcal{L}^{p_2,q_2}.$$

Остановимся более подробно на некоторых конкретных примерах пространств $\mathcal{L}^{p,q}$.

Пространство $\mathcal{L}^{p,p}$, $1 \le p < \infty$, совпадает с введенным ранее пространством $\mathcal{L}^p$, норма на котором задается формулой

$$\|T\|_p = (\mathrm{Tr}|T|^p)^{1/p} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p\right]^{1/p}.$$

Пространство $\mathcal{L}^{p,\infty}$, $1 < p < \infty$, состоит из компактных операторов T, для которых $\sigma_N(T) = O(N^{1-\alpha})$, т.е. $\mu_n(T) = O(n^{-\alpha})$. На этом пространстве имеется естественная норма

$$\|T\|_{p,\infty} = \sup_N \frac{1}{N^{1-\alpha}} \sigma_N(T).$$

Пространство $\mathcal{L}^{p,1}$ состоит из компактных операторов T, для которых сходится ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{\alpha-2} \sigma_N(T),$$

что эквивалентно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}\mu_{n-1}(T)$.

Между этими пространствами имеются следующие вложения:

$$\mathcal{L}^{p-} \equiv \mathcal{L}^{p,1} \subset \mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^{p,p} \subset \mathcal{L}^{p,\infty} \equiv \mathcal{L}^{p+}.$$

До сих пор мы определили пространства $\mathcal{L}^{p,q}$ для $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$. Дополним их определение при $p = 1$, $q = \infty$, полагая

$$\mathcal{L}^{1,\infty} = \{T \in \mathcal{K} : \ \sigma_N(T) = O(\log N)\}$$

и наделяя это пространство нормой

$$\|T\|_{1,\infty} = \sup_{N \ge 2} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}.$$

Конечность этой нормы влечет соотношение на s-числа оператора T вида $\mu_n = O(1/n)$. Пространство $\mathcal{L}^{1,\infty}$ является идеалом, двойственным к идеалу

$$\mathcal{L}^{\infty,1} = \{T \in \mathcal{K} : \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(T)}{n} < \infty\}.$$

Как мы отметили выше, для ядерных операторов $T \in \mathcal{L}^1$ определен след, задаваемый суммой s-чисел этого оператора. Однако с точки зрения приложений класс ядерных операторов слишком мал и нам хотелось бы определить след для более широкого класса операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$. Такой след называется следом Диксмье.

Пусть T – положительный оператор, принадлежащий идеалу $\mathcal{L}^{1,\infty}$. Нам хотелось бы определить его след по формуле

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}. \tag{2}$$

При этом возникают два вопроса:

(1) Существует ли предел в формуле (**??**) для всех операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$?
(2) Является ли функционал, задаваемый формулой (**??**), линейным?

Заметим, что решение вопроса о линейности указанного функционала тесно связано с ответом на вопрос о существовании предела в формуле (**??**). Действительно, для установления линейности нам необходимо сравнить величину

$$\gamma_N = \frac{\sigma_N(T_1 + T_2)}{\log N}$$

с суммой величин

$$\alpha_N = \frac{\sigma_N(T_1)}{\log N} \quad \text{и} \quad \beta_N = \frac{\sigma_N(T_2)}{\log N}.$$

Из неравенства треугольника для $\sigma_N(T)$ вытекает, что $\gamma_N \le \alpha_N + \beta_N$, а из отмеченного выше (формула (1)) неравенства $\sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2) \le \sigma_{2N}(T_1 + T_2)$ вытекает, что

$$\alpha_N + \beta_N \le \frac{\log(2N)}{\log N} \gamma_N.$$

Так как $\log(2N)/\log N \to 1$ при $N \to \infty$, то мы видим, что существование предела в (2) обеспечит нам линейность функционала (2).

Переходя к вопросу о существовании указанного предела, заметим, что для любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ последовательность чисел

$$\left\{ \frac{\sigma_N(T)}{\log N} \right\}$$

ограничена.

Это позволяет нам рассмотреть вопрос о существовании предела в формуле (2) в следующей, более общей постановке. А именно, будем искать на пространстве $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ линейную форму

$$\ell \equiv \mathrm{Lim}_\omega,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $\mathrm{Lim}_\omega a \ge 0$, если все $a_n \ge 0$;
(2) $\mathrm{Lim}_\omega a = \lim_{n\to\infty} a_n$, если предел справа существует;
(3) $\mathrm{Lim}_\omega(a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots) = \mathrm{Lim}_\omega\{a_n\}$.

Единственным нетривиальным условием является последнее, которое трактуется как *асимптотическая масштабная инвариантность*. Для того, чтобы пояснить происхождение данного названия, перейдем от последовательностей $\{a_n\}$ к функциям вещественного параметра, как мы уже делали это в случае функции σ_N. А именно, построим по последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченную функцию $f_a(\lambda)$ на положительной вещественной полуоси, задаваемую следующим образом: если $\lambda = N + t$ с $0 \leq t < 1$, т.е. $[\lambda] = N$, то положим $f_a(\lambda) = (1-t)a_N + ta_{N+1}$. Тем самым, введенная функция $f_a(\lambda)$ является кусочно линейной.

Заменим теперь функцию $f(\lambda) \equiv f_a(\lambda)$ ее *чезаровским средним*

$$(Mf)(\lambda) = \frac{1}{\log \lambda} \int_3^{\lambda} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Это среднее на ограниченных функциях f обладает следующим свойством асимптотической масштабной инвариантности:

$$|M(S_\mu f)(\lambda) - MF(\lambda| \longrightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где $(S_\mu f)(\lambda) := f(\lambda\mu)$ для любого $\mu > 0$. Возвращаясь к свойству (3) масштабной инвариантности, заметим, что последовательности $\tilde{a} = (a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots)$ отвечает функция $f_{\tilde{a}} = S_{1/2}(f_a)$.

Попытаемся теперь сформулировать более точно, какого рода предел мы хотели бы получить на пространстве $C_b(R_+)$ ограниченных непрерывных функций на полуоси $R_+ := [1, \infty)$. Поскольку нас интересуют только пределы указанных функций на бесконечности, рассмотрим вместо пространства $C_b(R_+)$ его фактор $B_\infty := C_b(R_+)/C_0(R_+)$ по подпространству $C_0(R_+)$ функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

Фиксируем положительную линейную форму ω на пространстве $C_b(R_+)$ такую, что $\omega = 0$ на подпространстве $C_0(R_+)$ и $\omega(1) = 1$. Иными словами, ω есть состояние на C^*-алгебре B_∞. Мы можем рассматривать $\omega(f)$ как "обобщенный предел" функции $f \in C_b(R_+)$ на бесконечности. По форме ω мы можем определить предел $\mathrm{Lim}_\omega(a)$ последовательности $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, задаваемый формулой:

$$\mathrm{Lim}_\omega(a) := \omega(Mf_a).$$

Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение 18. Для любого состояния ω на C^*-алгебре $B_\infty = C_b(R_+)/C_0(R_+)$ определим *след Диксмье* положительного оператора $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ по формуле

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) = \mathrm{Lim}_\omega \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda}.$$

Свойства следа Диксмье:

(1) *Аддитивность:* $\mathrm{Tr}_\omega(T_1 + T_2) = \mathrm{Tr}_\omega(T_1) + \mathrm{Tr}_\omega(T_2)$.

(2) *Положительность:* след Диксмье можно продолжить на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$ так, чтобы выполнялось свойство $\mathrm{Tr}_\omega(T) \geq 0$ на положительных операторах $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$.
(3) *Унитарная инвариантность:* $\mathrm{Tr}_\omega(UTU^*) = \mathrm{Tr}_\omega(T)$ для любого унитарного оператора U.
(4) *Коммутативность:* для любого ограниченного оператора $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ справедливо равенство: $\mathrm{Tr}_\omega(ST) = \mathrm{Tr}_\omega(TS)$.
(5) След $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ равен нулю на подпространстве $\mathcal{L}_0^{1,\infty}$, совпадающем с замыканием по норме $\|\cdot\|_{1,\infty}$ пространства Fin операторов конечного ранга. В частности, этот след зануляется на всех ядерных операторах из пространства $\mathcal{L}^1$.

В общем случае, след Tr_ω зависит от выбора состояния ω, однако справедливо следующее

Предложение 6. *Подпространство*

$$\mathcal{N} = \{T \in \mathcal{L}^{1,\infty} : \ Tr_\omega(T) \text{ не зависит от } \omega\}$$

является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{L}^{1,\infty}$. Это подпространство содержит подпространство $\mathcal{L}_0^{1,\infty}$ и замкнуто относительно сопряжения обратимыми операторами из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Определение 19. Будем называть оператор $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ *измеримым*, если существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(T)}{\log n}.$$

В этом случае след Диксмье $\mathrm{Tr}_\omega(T)$, конечно, не зависит от ω, поэтому будем обозначать его через

$$\mathrm{Tr}^+ T = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda}.$$

Пример 1. Приведем в качестве примера формулу для следа оператора Лапласа на сфере S^n, наделенной стандартной метрикой. Собственные числа этого оператора равны $l(l+n-1)$, где l – целое неотрицательное число, и имеют кратность $m_l = \binom{l+n}{n} - \binom{l+n-2}{n}$. Тогда оператор $\Delta^{-n/2}$ измерим и его след Диксмье равен

$$\mathrm{Tr}^+ \Delta^{-n/2} = \frac{2}{n!}\,.$$

Пользуясь введенными идеалами $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ и $\mathcal{L}^{p,\infty}(\mathcal{H})$, можно определить понятие суммируемости спектральной тройки.

Определение 20. Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ есть спектральная тройка, в которой алгебра $\mathcal{A}$ является локальной. Такая тройка называется (p,∞)-*суммируемой*, если $p \geq 1$ и

$$a(1+D^2)^{-1/2} \in \mathcal{L}^{p,\infty}(\mathcal{H})$$

для любого $a \in \mathcal{A}$.

Предложение 7. *Пусть* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *есть* (p,∞)-*суммируемая спектральная тройка. Тогда*

(1) *Для всех* $1 \leq s \leq p$

$$a(1+D^2)^{-s/2} \in \mathcal{L}^{p/s,\infty}(\mathcal{H})$$

и для всех $Re\, s > p$ *оператор* $a(1+D^2)^{-s/2}$ *является ядерным.*

(2) *Для любого следа Диксмье* Tr_ω *функция*

$$a \longmapsto Tr_\omega(a(1+D^2)^{-p/2})$$

задает след на $\mathcal{A}$.

Пример 2. Пусть S есть (тривиальное) комплексное спинорное расслоение над $\mathbb{R}^d$. Тройка $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), L^2(\mathbb{R}^d, S), D)$, где D – оператор Дирака, является гладкой локальной (d,∞)-суммируемой спектральной тройкой. Для любой функции $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\mathrm{Tr}_\omega(f(1+D^2)^{-d/2}) = C_d \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по К-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[10] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[11] Г.Г.Каспаров, Операторный K-функтор и расширения C*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[12] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[13] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[14] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[15] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[16] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[17] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.

[18] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.

[19] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.

[20] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.

[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.

[22] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.