ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция II. Фоковское пространство

1.1. **Фермионное фоковское пространство.** Многочастичные системы описываются в терминах фермионного фоковского пространства. Пусть F есть комплексное гильбертово пространство. *Фермионное фоковское пространство* $\mathcal{F}$ над F определяется как пополнение

$$\mathcal{F} = \overline{\Lambda(F)} = \overline{\bigoplus_p \Lambda^p(F)}$$

внешней алгебры $\Lambda(F)$ пространства F, являющейся прямой суммой подпространств $\Lambda^p(F)$ p-частичных состояний вида

$$\Lambda^p(F) = \mathrm{span}\{v_1 \wedge \ldots \wedge v_p,\ v_j \in F\}.$$

Скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$ в F продолжается естественным образом до скалярного произведения на $\Lambda(F)$. А именно, на мономах $v_1\wedge\ldots\wedge v_p$ одинаковой степени оно полагается равным

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, v_1' \wedge \ldots \wedge v_p') := \sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sgn}\,\sigma}(v_1, v_{i_1}') \cdot \ldots \cdot (v_p, v_{i_p}'),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\sigma = \{i_1, \ldots, i_p\}$ множества $\{1, \ldots, p\}$, а $\mathrm{sgn}\,\sigma$ обозначает четность перестановки σ (скалярное произведение мономов разной степени полагается равным нулю). Скалярное произведение на мономах продолжается по линейности на всю внешнюю алгебру $\Lambda(F)$. Фермионное фоковское пространство $\mathcal{F}$ является пополнением алгебры $\Lambda(F)$ по норме, определяемой введенным скалярным произведением.

Введем *оператор* $a_i^\dagger$ *рождения частицы* в состоянии f_i, задаваемый внешним умножением на вектор f_i. Эрмитово сопряженный к нему *оператор* a_i *уничтожения частицы* в состоянии f_i задается внутренним умножением на двойственный вектор $f_i' \in F'$. Эти операторы удовлетворяют стандартным антикоммутационным соотношениям

$$a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger = 0, \quad a_i a_j + a_j a_i = 0$$

и

$$a_i^\dagger a_j + a_j a_i^\dagger = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$$

Любой одночастичный линейный оператор $O : F \to F$ продолжается до линейного оператора $\widehat{O} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ по формуле

$$\widehat{O}\left(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p}\right) = (Ov_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (Ov_{i_p})$$

на мономах с последующим продолжением по линейности на всю алгебру $\Lambda(F)$

с последующим замыканием до оператора на $\mathcal{F} = \overline{\Lambda(F)}$.

1.2. **Фермионное фоковское пространство твердого тела.** Конкретизируем теперь приведенную конструкцию фермионного фоковского пространства в случае электронов в твердом теле.

Напомним, что основное состояние в этой модели характеризуется наличием заполненных одноэлектронных уровней с энергиями ниже уровня энергии Ферми E_F и пустых одноэлектронных уровней с энергиями выше E_F. Обозначим через $\mathcal{V}_-$ гильбертово пространство, порожденное состояниями с энергиями ниже E_F, а через $\mathcal{V}_+$ гильбертово пространство, порожденное состояниями с энергиями выше E_F.

Рассмотрим теперь в качестве гильбертова пространства F из предыдущего параграфа пространство $\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*$ со скалярным произведением $\langle\cdot|\cdot\rangle$, индуцированным скалярными произведениями на $\mathcal{V}_+$ и пространстве $\mathcal{V}_-^*$, двойственном к $\mathcal{V}_-$.

Внешняя алгебра $\Lambda(F)$ имеет в рассматриваемом случае двойную градуировку

$$\Lambda(\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*) = \bigoplus_{p,q\geq 0} \Lambda^{p,q},$$

где

$$\Lambda^{p,q} = \Lambda^p(\mathcal{V}_+) \otimes \Lambda^q(\mathcal{V}_-^*).$$

С физической точки зрения p есть число одночастичных возбуждений основного состояния, т.е. число заполненных уровней проводимости. Тогда как q есть число однодырочных возбуждений основного состояния, т.е. число освобожденных уровней валентности.

Список литературы

[1] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[2] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[3] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.