ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция III. C^*-алгебры

1.1. C^*-алгебры. Основные определения.

Определение 1. *Банаховой алгеброй* называется ассоциативная алгебра A над полем $\mathbb{C}$, являющаяся одновременно полным нормированным пространством, в котором выполняется соотношение

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

для всех $a, b \in A$. Алгебра A называется *унитальной*, если она содержит единицу $1 = 1_A$. В этом случае требуется, чтобы $\|1\| = 1$.

Определение 2. Алгебра A называется $*$-*алгеброй*, если на ней задана *инволюция*, т.е. антилинейное отображение $a \mapsto a^*$, обладающее следующими свойствами:

$$(a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^*a^*$$

для любых $a, b \in A$. Если алгебра A банахова, то требуется, чтобы отображение $a \mapsto a^*$ было изометричным.

Определение 3. Банахова $*$-алгебра A называется C^*-*алгеброй*, если она обладает следующим дополнительным свойством:

$$\|a^2\| = \|a^*a\|$$

для всех $a \in A$.

Стандартным примером C^*-алгебры является алгебра $C(X)$ комплекснозначных непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$ на компактном топологическом пространстве X (все рассматриваемые топологические пространства, рассматриваемые нами, предполагаются хаусдорфовыми). Норма функции f равна

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Единицей в алгебре $C(X)$ служит функция $f \equiv 1$, а роль инволюции играет отображение: $f \mapsto f^*$, где $f^*(x) := \overline{f(x)}$. Алгебра $C(X)$ является коммутативной унитальной C^*-алгеброй.

Более того, согласно теореме Гельфанда–Наймарка любая коммутативная унитальная C^*-алгебра есть алгебра вида $C(X)$ для некоторого компактного топологического пространства X.

Всякую неунитальную банахову алгебру A можно сделать унитальной, формально добавляя к ней единицу. Иначе говоря, можно расширить A до алгебры $A^+ := A \times \mathbb{C}$ с очевидными покомпонентными правилами сложения, умножения на комплексные числа и инволюции. Произведение в A^+ вводится по правилу:

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu), \ a, b \in A, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

так что 1_{A^+} отождествляется с элементом $(0, 1)$. Норма элемента (a, λ) определяется как

$$\|(a, \lambda)\| := \sup_{\|b\| \leq 1} \{\|ab + \lambda b\|\}.$$

Построенная алгебра A^+ является унитальной C^*-алгеброй, если A была C^*-алгеброй.

Стандартным примером некоммутативной унитальной C^*-алгебры является алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (все рассматриваемые нами гильбертовы пространства предполагаются комплексными и сепарабельными). Единица в этой алгебре задается тождественным оператором I, а инволюция задается отображением $a \mapsto a^*$, где $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, а a^* – оператор, сопряженный к a. Норма оператора a равна

$$\|a\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \sup_{\psi \in \mathcal{H}, \|\psi\|=1} \|a\psi\|.$$

Еще одна теорема Гельфанда–Наймарка утверждает, что любая C^*-алгебра A изоморфна $*$-подалгебре алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, замкнутой по операторной норме. Известная ГНС-конструкция позволяет такую $*$-подалгебру построить явно.

Определение 4. *Спектром* $\sigma(a)$ элемента a унитальной банаховой алгебры A называется множество комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1_A$ не обратим в алгебре A. Если алгебра A не унитальна, то спектр $a \in A$ состоит из комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1_{A^+}$ не обратим в A^+.

Приведем два важных свойства спектра элементов унитальной банаховой алгебры A, доказательство которых проводится также, как доказательство аналогичных свойств спектра ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве.

- Спектр $\sigma(a)$ произвольного элемента $a \in A$ замкнут. Кроме того, он ограничен, точнее, содержится в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$, откуда следует, что $\sigma(a)$ компактен.

- Спектр $\sigma(a)$ произвольного элемента $a \in A$ непуст.

Определение 5. Элемент $a \in A$ банаховой $*$-алгебры A называется *самосопряженным*, если $a^* = a$. Элемент $a \in A$, принадлежащий C^*-алгебре A, называется *положительным*, если он самосопряжен и его спектр $\sigma(a)$ неотрицателен, т.е. принадлежит интервалу $[0, \infty)$.

Упражнение 1. Покажите, что элемент $a \in A$ C^*-алгебры A является положительным тогда и только тогда, когда он представляется в виде $a = b^*b$ для некоторого элемента $b \in A$. Покажите, что любой положительный элемент $a \in A$ унитальной C^*-алгебры A удовлетворяет неравенству

$$0 \leq a \leq \|a\| 1_A.$$

Пользуясь введенным определением, можно ввести на самосопряженных элементах C^*-алгебры A отношение частичного порядка.

Определение 6. Пусть a и b – самосопряженные элементы C^*-алгебры A. Будем говорить, что $a \leqslant b$, если элемент $b - a$ положителен.

1.2. **Вещественные и градуированные C^*-алгебры.**

Определение 7. *Вещественной C^*-алгеброй* называется пара $(A, \bar{\cdot})$, состоящая из (комплексной) C^*-алгебры A и антилинейной $*$-инволюции $\bar{\cdot}$, называемой *сопряжением*, обладающим следующими свойствами:

$$\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}, \ \overline{x^*} = (\bar{x})^*, \ \overline{\lambda x + y} = \bar{\lambda}\bar{x} + \bar{y},$$

где $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Элемент $x \in A$ называется *вещественным*, если $\bar{x} = x$ и *мнимым*, если $\bar{x} = -x$, а $*$-морфизм $\phi : (A_1, \bar{\cdot}) \to (A_2, \bar{\cdot})$ вещественных C^*-алгебр называется *вещественным*, если $\phi(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$, $x \in A_1$.

Эквивалентно, вещественную C^*-алгебру можно определить как C^*-алгебру A, заданную вместе с линейной антиинволюцией t, называемой *транспонированием*. Транспонирование $x \mapsto x^t$ является комплексно-линейным отображением, таким что

$$(xy)^t = y^t x^t, \ (x^*)^t = (x^t)^*, \ (x^t)^t = x$$

для всех $x, y \in A$. Связь между этими эквивалентными определениями устанавливается формулой

$$x^t = (\bar{x})^*, \ x \in A.$$

Определение 8. Пусть $\mathcal{H}$ есть (комплексное) гильбертово пространство. Антиунитарный оператор T на $\mathcal{H}$ задает *кватернионную структуру* на $\mathcal{H}$, если он антилинеен и

$$\langle Tv_1 | Tv_2 \rangle = \langle v_2 | v_1 \rangle, \ \langle Tv_1 | v_2 \rangle = -\langle Tv_2 | v_1 \rangle$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$.

Пара $(\mathcal{H}, T)$, состоящая из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и кватернионной структуры T, называется *кватернионным гильбертовым пространством.* Комплексно-линейное отображение $\phi : (\mathcal{H}_1, T_1) \to (\mathcal{H}_2, T_2)$ кватернионных гильбертовых пространств называется *кватернионным*, если $\phi \circ T_1 = T_2 \circ \phi$.

Если $(\mathcal{H}, T)$ есть кватернионное гильбертово пространство, то алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ является вещественной C^*-алгеброй с сопряжением, задаваемым формулой

$$\bar{L} = T^*LT = -TLT, \ L \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

В случае, когда $\mathcal{H} = \ell^2(\Lambda) \otimes V$, кватернионная структура задается как $C \otimes T$, где C – комплексное сопряжение на $\ell^2(\Lambda)$, а T – кватернионная структура на V.

Пример 1. Примером кватернионной структуры на $\ell^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^2$ может служить оператор

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{pmatrix},$$

где C – комплексное сопряжение на $\mathbb{C}$. Это сопряжение индуцирует на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{End}\,\mathbb{C}^2$ сопряжение вида

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Для вещественной C^*-алгебры $(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}), \bar{\cdot})$ подалгебра вещественных элементов порождается единичной матрицей и матрицами $i\sigma_x$, $i\sigma_y$ и $i\sigma_z$, где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, эта алгебра (как алгебра нал $\mathbb{R}$) изоморфна алгебре кватернионов $\mathbb{H}$.

Определение 9. *Градуировкой* на $*$-алгебре A называется разложение $A = A_0 \oplus A_1$ алгебры A в прямую сумму замкнутых подпространств, такое что

$$A_i \cdot A_j = A_{(i+j) \bmod 2}, \ *A_i \subset A_i, \ i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Алгебра A с указанной градуировкой называется *градуированной $*$-алгеброй.*

Элементы из A_0 называются *четными*, а из A_1 – *нечетными*. Элементы a, принадлежащие одному из слагаемых A_i, называются *однородными* и в этом случае $|a|$ обозначает их четность. Отображение градуированных $*$-алгебр называется *четным*, если оно сохраняет градуировку, и *нечетным* в противоположном случае. Вещественная $*$-алгебра $(A, \bar{\cdot})$, наделенная градуировкой, называется *вещественной градуированной $*$-алгеброй*, если сопряжение четно.

1.3. **Тензорные произведения C^*-алгебр.** Если A и B – градуированные (вещественные) C^*-алгебры. textitАлгебраическим тензорным произведением этих алгебр называется C^*-алгебра $A \odot B$, элементами которой являются конечные суммы

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \odot b_k,$$

которая наделяется градуировкой вида

$$(A \odot B)_k = \bigoplus_{i+j=k} A_i \odot B_j \ , \quad i,j,k \in \mathbb{Z}_2.$$

Тензорным произведением $A \otimes B$ C^*-алгебр A и B называется пополнение $A \odot B$ по перекрестной C^*-норме, удовлетворяющей условию $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$ (по вопросам существования и единственности такой нормы см. [5]).

Можно однако определить другое, градуированное тензорное произведение. Для этого наделим $A \odot B$ новой алгебраической структурой и новой инволюцией, определяемыми соотношениями

$$(a \odot b) \cdot (a' \odot b') = (-1)^{|a'||b|} aa' \odot bb',$$

и

$$(a \odot b)^* = (-1)^{|a||b|} a^* \odot b^*$$

для однородных элементов $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. Они порождают другое алгебраическое тензорное произведение $A \widehat{\odot} B$, которое является вещественной C^*-алгеброй, если A и B были таковыми. Если A и B – градуированные (вещественные) C^*-алгебры, то на $A \widehat{\odot} B$ существует естественная перекрестная C^*-норма, пополнение $A \widehat{\odot} B$ по которой приводит к градуированной (вещественной) C^*-алгебре $A \widehat{\otimes} B$, называемой *градурованным тензорным произведением* алгебр A и B (см. [5]).

1.4. **Клиффордовы алгебры.** Алгебры наблюдаемых твердых тел принадлежат к классу клиффордовых алгебр. Напомним их определение.

Пусть V есть n-мерное евклидово пространство, наделенное ортонормированным базисом $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 10. *Клиффордовой алгеброй* над V называется ассоциативная алгебра $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}(n)$ над полем $\mathbb{R}$, порождаемая образующими $1, e_1, \ldots, e_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$e_i^2 = -1, \ e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Из этого определения вытекает, что $V \subset \mathrm{Cl}(V)$ и

$$uv + vu = -2(u,v) \quad \text{для } u, v \in V.$$

Как вещественное векторное пространство, $\mathrm{Cl}(V)$ имеет размерность 2^n с базисом, задаваемым 1 и элементами вида

$$e_I := e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot \ldots \cdot e_{i_k},$$

где $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ – строго возрастающий набор индексов из k элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Пример 2. (1) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ с $e_1 = i$.
(2) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{H}$ с $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$.
(3) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^4) = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{H}) - -$пространство кватернионных 2×2-матриц.

Комплексная клиффордова алгебра $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ есть алгебра

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V) = \mathrm{Cl}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

которая изоморфна $\mathrm{Cl}(V^{\mathbb{C}})$, где $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Спинорная группа $\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Spin}(n)$, $n > 2$, есть односвязная накрывающая группы $\mathrm{SO}(V)$, которую можно включить в точную последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(V) \longrightarrow 1.$$

Пример 3. (1) $\mathrm{Spin}(3)) = \mathrm{SU}(2)$.
(2) $\mathrm{Spin}(4)) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.

Определение 11. *Клиффордово представление* — это гомоморфизм $\rho : \mathrm{Cl}(V) \to \mathcal{B}(S)$ из клиффордовой алгебры в алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в комплексном векторном пространстве S, называемом *пространством спинов*.

Иначе, клиффордово представление можно определить как линейное отображение $\rho : V \to \mathcal{B}(S)$, обладающее свойством

$$\rho(u)\rho(v) + \rho(v)\rho(u) = -2(u, v), \quad u, v \in V.$$

Такое отображение продолжается до представления $\rho : \mathrm{Cl}(V) \to \mathcal{B}(S)$.

Определение 12. *Оператор Дирака* для алгебры $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}(n)$ определяется как оператор

$$D = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \partial/\partial x_k,$$

действующий на S-значных функциях на V, где линейные отображения $\gamma_k : S \to S$ удовлетворяют условию

$$\gamma_k \gamma_j + \gamma_j \gamma_k = -2\delta_{kj}.$$

Отображения γ_k допускают представление в виде *матриц Дирака* (см. [4]).

Главное свойство оператора Дирака D состоит в том, что он является квадратным корнем из оператора Лапласа в следующем смысле

$$D^2 = -\Delta \cdot \mathrm{id}_V = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \dots & 0 & \\ 0 & -\Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & -\Delta \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \partial^2/\partial x_k^2$ – лапласиан в $\mathbb{R}^n$.

Определение алгебр Клиффорда можно перенести на случай вещесивенных векторных пространств $V_{r,s}$, наделенных невырожденной билинейной формой $(\cdot, \cdot)$ с сигнатурой (r, s) такой, что $r + s = n$. В этом случае клиффордову алгебру $\mathrm{Cl}(V_{r,s}) = \mathrm{Cl}_{r,s}$ можно определить снова как унитальную ассоциативную алгебру, содержащую $V_{r,s}$, элементы которой $u, v \in V_{r,s}$ удовлетворяют соотношениям

$$\rho(u)\rho(v) + \rho(v)\rho(u) = -2(u, v).$$

Более общим образом можно определить комплексную клиффордову C^*-алгебру $\mathbb{C}\mathrm{l}_{r,s}$ с r положительными и s отрицательными образующими как C^*-алгебру с унитарными образующими $k_1, \dots, k_r, j_1, \dots, j_s$, удовлетворяющими соотношениям

$$k_a k_b + k_b k_a = 2\delta_{ab}, \ j_\alpha j_\beta + j_\beta j_\alpha = -2\delta_{\alpha\beta}, \ k_a j_\alpha + j_\alpha k_a = 0,$$

где $a, b = 1, \dots, r, \alpha, \beta = 1, \dots, s$.

Если задать на этой алгебре антилинейную инволюцию, относительно которой все образующие k_a, j_α являются вещественными, то получим вещественную C^*-алгебру $(\mathbb{C}\mathrm{l}_{r,s}, \bar{\cdot}) = \mathrm{Cl}_{r,s}$.

Список литературы

[1] J.Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland, 1982

[2] W.Arveson, *An Introduction to C^*-algebras*, Spronger, 1976.

[3] K.Davidson, *C^*-algebras by example*, AMS, 1996.

[4] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[5] G.J.Murphy, *C^*-algebras and Operator Algebras*, Academic Press, San Diego, CA, 1990.