ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция V. W^*-динамические системы и инвариантные следы

1.1. W^*-динамические системы. Во многих задачах с недостаточной гладкостью приходится использовать вместо класса C^*-алгебр класс W^*-алгебр фон Неймана.

Определение 1. *Алгеброй фон Неймана* или *W^*-алгеброй* называется подалгебра R в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, которая является унитальной $*$-алгеброй, замкнутой в слабой операторной топологии. Последнее означает, что последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in R$, сходится в этой топологии к элементу $a \in R$, если для любых $\xi, \eta \in \mathcal{H}$

$$|(\xi, (a_n - a)\eta)| \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Каждая алгебра фон Неймана является также C^*-алгеброй.

Алгебры фон Неймана характеризуются следующей теоремой о двойном коммутанте.

Теорема 1. *Пусть R есть унитальная $*$-подалгебра в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *R есть алгебра фон Неймана;*
2. *R замкнута в сильной операторной топологии;*
3. *двойной коммутант R'' алгебры R совпадает с R.*

Напомним, что коммутант R есть

$$R' = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \ SR = RS \text{ для любого } S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

Двойной коммутант $R'' = (R')'$. При этом всегда $R \subset R''$.

Доказательство теоремы можно найти в статьях из списка литературы к этой лекции.

Пример 1. (1) Если R есть коммутативная W^*-алгебра в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то она изоморфна алгебре операторов умножения на функции из пространства $L^2(\Omega, \mu)$, где (Ω, μ) – некоторое пространство с мерой.

(2) Алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ является алгеброй фон Неймана, т.е. $\mathcal{B}(\mathcal{H})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Покажем, как изменяются основные определения, относящиеся к C^*-динамическим системам, при переходе к алгебрам фон Неймана.

Определение 2. *W^*-динамическая система* задается тройкой (R, G, α), в которой R есть алгебра фон Неймана, наделенная слабо непрерывным действием $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(R)$. Последнее означает, что отображение $G \ni t \mapsto \alpha_t(a)$ слабо непрерывно для любого $a \in R$.

Определение 3. *Ковариантное представление* W^*-динамической системы задается парой (π, U), состоящей из невырожденного слабо непрерывного представления алгебры R в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и сильно непрерывного унитарного представления группы G в $\mathcal{H}$, причем

$$\pi(\alpha_t(a)) = U(t)\pi(a)U(t)^* \ , \quad a \in R, t \in G.$$

Определение 4. *Регулярное представление* W^*-динамической системы (R, G, α) в гильбертовом пространстве $L^2(G, \mathcal{H})$ задается формулами

$$(\pi(a)\psi)(s) = \alpha_s^{-1}(a)\psi(s) \ , \quad (U(t)\psi)(s) = \psi(s - t) \ ,$$

где $a \in R$, $s, t \in G$, $\psi \in L^2(G, \mathcal{H})$.

Скрещенное произведение $R \rtimes_\alpha G$ есть наименьшая алгебра фон Неймана в $\mathcal{B}(L^2(G, \mathcal{H}))$, содержащая $\pi(R)$ и $U(G)$.

В случае, когда $G = \mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$, это скрещенное произведение можно записать в таком же виде, как для C^*-динамических систем:

$$R \rtimes_\alpha G = W^* - \mathrm{span}\{\pi(a)h(D) : a \in R, h \in L^\infty(\hat{G})\},$$

где (π, U) – регулярное представление, а D – генераторы представления U.

1.2. **Инвариантные следы.** Пусть A есть C^*-алгебра и A^0 – конус, состоящий из положительных элементов A. *Весом* на A называется функция $\phi : A^0 \to [0, \infty]$ такая, что

(1) $\phi(\lambda a) = \lambda\phi(a) \ , \quad a \in A^0, \lambda \in [0, \infty)$;
(2) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \ , \quad a, b \in A^0$.

Приведем основные определения, относящиеся к весам. Вес ϕ называется *точным*, если из $\phi(a) = 0$ для $a \in A^0$ следует, что $a = 0$. Он называется *конечным*, если $\phi(a) < \infty$ для всех $a \in A^0$, и *полунепрерывным снизу*, если $\phi(a) \le \liminf \phi(a_n)$ для любой последовательности $a_n \to a$ по норме к положительному элементу $a \in A^0$. Наконец, вес ϕ называется *нормальным*, если для любого возрастающего семейства $\{a_n\}$, $a_n \in A^0$, с верхней гранью $\sup a_n \in A^0$ выполняется соотношение

$$\phi(\sup a_n) = \sup \phi(a_n).$$

Обозначим через A^0_ϕ множество положительных элементов $a \in A^0$ таких, что $\phi(a) < \infty$ и будем называть ϕ *плотно определенным*, если A^0_ϕ плотно в A^0. Линейная оболочка A^0_ϕ обозначается через A_ϕ и является $*$-подалгеброй в A. Любой вес ϕ продолжается до линейного функционала на A_ϕ и если ϕ плотно определен и полунепрерывен снизу, то A_ϕ является банаховой алгеброй с нормой

$$\|a\|_\phi = \|a\| + \phi(|a|).$$

Вес ϕ называется *следом*, если он удовлетворяет дополнительному условию

$$\phi(uau^{-1}) = \phi(a),$$

где $a \in A$, u – унитарный элемент из унитализации A^+ алгебры A.

Обозначим далее через

$$A_\phi^2 = \{a \in A : \phi(a^*a) < \infty\}$$

левый идеал в алгебре A, содержащий A_ϕ, который является двусторонним, если ϕ есть след. В последнем случае $\phi(ab) = \phi(ba)$, $a, b \in A_\phi^2$ (почему?).

Будем называть след $\mathcal{T}$ на A *допустимым*, он является плотно определенным, точным и полунепрерывным снизу.

Предложение 1. *Пусть (A, G, α) есть C^*-динамическая система и $\mathcal{T}$ – допустимый след на C^*-алгеъре A. Если $\mathcal{T}$ является α-инвариантным, т.е.*

$$\mathcal{T}(\alpha_t(a)) = \mathcal{T}(a)\ , \quad a \in A, t \in G,$$

то алгебру A можно вложить ковариантным образом в некоторую алгебру фон Неймана $R = L^\infty(A, \mathcal{T})$, а α продолжить до действия $\tilde{\alpha}$ группы G на этой алгебре, так что $(R, \mathcal{T}), G, \tilde{\alpha})$ будет W^*-динамической системой с допустимым следом на R, который продолжает $\mathcal{T}$ и является $\tilde{\alpha}$-инвариантным.

Доказательство этого предложения и конструкцию W^*-алгебры R можно найти в статье [1] из списка литературы.

Перейдем к построению двойственных следов. Пусть (R, G, α) есть W^*-динамическая система, группа G есть $\mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$, R – алгебра фон Неймана с допустимым следом $\mathcal{T}$, инвариантным относительно α. Пусть $\hat{G}$ есть группа, двойственная к G. Тогда действие α можно продолжить до (слабо) непрерывного действия $\hat{\alpha} : \hat{G} \to \mathrm{Aut}(R \rtimes_\alpha G)$, действующего на образующих по правилу

$$\hat{\alpha}_k(\pi(a)) = \pi(a),\ \hat{\alpha}_k(U(t)) = \overline{\langle k, t\rangle} U(t),$$

где $a \in R, t \in G, k \in \hat{G}$ и (π, U) – ковариантное представление системы (R, G, α).

Предложение 2. *Пусть (R, G, α) есть W^*-динамическая система с α-инвариантным допустимым следом $\mathcal{T}$. Тогда на скрещенном произведении $R \rtimes_\alpha G$ существует допустимый след $\hat{\mathcal{T}}_\alpha$, называемый двойственным слтдом, который лево-инвариантен относительно двойственного действия $\hat{\alpha}$. Двойственный след $\hat{\mathcal{T}}_\alpha$ определяется однозначно с точностью до нормировки меры Хаара.*

Доказательство этого предложения можно также найти в статье [1] из списка литературы.

Пусть G есть группа $\mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$. Введем обозначение $\mathcal{N} = R \rtimes_\alpha G$. Пусть (π, U) есть регулярное представление, а $D = (D_1, \ldots, D_n)$ – набор генераторов представления U. Тогда

$$\hat{\mathcal{T}}_\alpha(\pi(a) f(D)) = \mathcal{T}(a) \int_{\hat{G}} f(k) dk,$$

где $a \in L^1(R) \cap R$, $f \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$, так что $\pi(a) f(D) \in L^1(\mathcal{N})$, $k \in \hat{G}$.

Двойственное действие $\hat{\alpha}$ порождает трансляции, действующие на функциях от D по формуле

$$\hat{\alpha}_k(h(D)) = h(D+k),$$

где $h \in L^2(\hat{G}) \cap L^\infty(\hat{G})$.

Список литературы

[1] H.Schulz-Baldes, T.Stoiber, *Harmonic analysis in operator algebras and its applications to index theory and topological solid state systems*, arXiv:2206.07781v2(math-ph), 2022.

[2] Т.Русалев, *Алгебры фон Неймана и их применение в квантовой теории поля и гравитации*, МИАН, 2025 (препринт).