

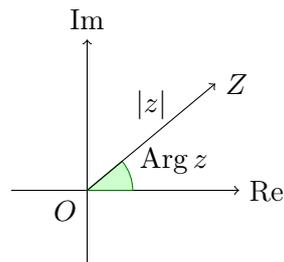
## Геометрия комплексных чисел

▷ Напомним, что *комплексным числом* называется запись вида  $x + yi$ , где  $x$  и  $y$  действительные числа, а  $i$  — формальный символ. Умножение комплексных чисел задается правилом  $i^2 = -1$ .

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i;$$

$$(x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i.$$

▷ Будем отождествлять комплексное число  $z = x + yi$  с точкой  $Z = (x, y)$  плоскости. *Модулем* числа  $z$  называется длина вектора  $OZ$ , а *аргументом* числа  $z$  — (ориентированный) угол между осью абсцисс и вектором  $OZ$ .



**Задача 0.1.** Какое множество точек комплексной плоскости задается условием

а)  $|z - i| = 1$ ; б)  $|z - i| = |z - 1|$ ?

**Задача 0.2.** Если число  $z$  имеет модуль  $r$  и аргумент  $\phi$ , то  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ .

**Задача 0.3.** При умножении комплексных чисел аргументы складываются, а модули перемножаются.

**Задача 0.4.** Преобразование плоскости  $z \mapsto az$  ( $a \neq 0$ ) является *поворотной гомотетией* (т. е. композицией поворота и гомотетии с тем же центром).

**Задача 0.5.** а) Всегда ли преобразование плоскости  $z \mapsto az + b$  ( $a \neq 0$ ) является поворотной гомотетией? б) Когда оно является поворотом?

**Задача 0.6.** а) Композиция поворотных гомотетий и параллельных переносов является либо поворотной гомотетией, либо параллельным переносом.

б) Композиция поворотов и параллельных переносов является либо поворотом, либо параллельным переносом.

**Задача 0.7.** а) Три точки  $z_1, z_2, z_3$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их *простое отношение*  $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$  вещественно.

б) Угол  $Z_1$  треугольника  $Z_1Z_2Z_3$  равен аргументу простого отношения  $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$ , а отношение боковых сторон — модулю этого простого отношения.

**Задача 0.8.** Четыре точки  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  лежат на одной окружности или одной прямой тогда и только тогда, когда их *двойное отношение*  $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$  вещественно.