

Дробно-линейные преобразования

- ▷ Преобразование множества $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ вида $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$) называется *дробно-линейным преобразованием* плоскости.

Задача 1.1. Дробно-линейные преобразования образуют группу. (Эта группа, по причинам, которые будут объяснены позже, обозначается $PSL_2(\mathbb{C})$.)

- ▷ Как обсуждалось на лекции, эта группа порождена преобразованиями вида $z \mapsto az + b$ и $z \mapsto 1/z$. Преобразования первого вида суть поворотные гомотетии и параллельные переносы, а преобразование второго вида является композицией инверсии и отражения.
- ▷ Окружность или прямую (вместе с точкой ∞) будем называть *обобщенной окружностью*. Так как и инверсии, и тем более поворотные гомотетии переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности и сохраняют углы между ними, теми же свойствами обладают все дробно-линейные преобразования.

Задача 1.2. Действие группы дробно-линейных преобразований на обобщенных окружностях *транзитивно*, то есть любую обобщенную окружность можно перевести в любую обобщенную окружность.

Задача 1.3. а) Действие группы дробно-линейных на $\bar{\mathbb{C}}$ *3-транзитивно*, то есть любую тройку точек можно перевести дробно-линейным преобразованием в любую другую.
б) Единственно ли такое дробно-линейное преобразование?

Задача 1.4. Дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение.

Задача 1.5. Переведем дробно-линейным преобразованием первые точки z_1, z_2, z_3 в $\infty, 0$, и 1 соответственно. Пусть λ — образ точки z_4 при этом отображении. Выразите двойное отношение $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ через λ .

Задача 1.6. Опишите *стабилизатор* а) вещественной прямой; б) единичной окружности с центром в начале координат (то есть опишите все дробно-линейные преобразования, переводящие данный объект в себя).

- ▷ Преобразование множества $\bar{\mathbb{C}}$, переводящее обобщенные окружности в обобщенные окружности, называется *круговым преобразованием*.

Задача 1.7* (теорема Мёбиуса). а) Любое непрерывное круговое преобразование является либо дробно-линейным, либо комплексно сопряженным к дробно-линейному.
б) Существенно ли требование непрерывности?

Задача 1.8. а) Из теоремы Мёбиуса следует, что любое круговое преобразование раскладывается в композицию инверсий. б) Какое число инверсий достаточно рассмотреть?