Движения

▷ Напомним, что “элемента длины” для модели Пуанкаре геометрии Лобачевского имеет вид $\frac{2}{1-|z|^2}ds$ для модели в круге и $\frac{1}{y}ds$ для модели в верхней полуплоскости, где ds — элемент длины в Евклидовой геометрии.

Задача 2.1. Окружность в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского является Евклидовой окружностью (вообще говоря, с другим центром).

Указание. Можете ли вы доказать утверждение хотя бы для одной окружности?

Задача 2.2. Чему в геометрии Лобачевского равна длина окружности радиуса r? Больше она или меньше, чем в Евклидовой геометрии?

▷ Напомним, что преобразование называется *изометрией* или *движением*, если оно сохраняет расстояния.

Задача 2.3. Любое движение а) Евклидовой геометрии; б) геометрии Лобачевского задается образом любых трех точек, не лежащих на одной прямой.

Задача 2.4. Любое движение а) Евклидовой геометрии; б) геометрии Лобачевского является композицией не более чем 3 симметрий относительно прямых.

Задача 2.5. а) Симметрия относительно прямой в модели Пуанкаре является инверсией относительно соответствующей Евклидовой окружности.

б) Любое движение геометрии Лобачевского является либо вещественным дробно-линейным преобразованием, либо комплексно-сопряженным к нему.

▷ Будем говорить, что композиция четного числа симметрий, *сохраняет ориентацию*, а композиция нечетного числа симметрий *меняет ориентацию*.

Задача 2.6 (теорема Шаля). а) Движение Евклидовой плоскости, сохраняющее ориентацию, является поворотом или параллельным переносом.

б) Опишите все пары прямых, композиция симметрий относительно которых дает данный поворот.

в) Движение Евклидовой плоскости, меняющее ориентацию, является *скользящей симметрией* (композицией симметрии относительно прямой и параллельного переноса вдоль той же прямой).

Задача 2.7. Движение плоскости Лобачевского, сохраняющее ориентацию, заменой координат может быть приведено ровно к одному из следующих видов:

- поворот круга относительно его центра (“эллиптическое движение”);
- сдвиг верхний полуплоскости вдоль действительной оси (“параболическое движение”);
- гомотетия верхней полуплоскости с центром в нуле (“гиперболическое движение”).

Задача 2.8. Движение плоскости Лобачевского, меняющее ориентацию является “скользящей симметрией” (композицией гиперболического движения и симметрии относительно инвариантной прямой).