Фуксовы группы

▷ Напомним, что *фуксовой группой* называется дискретная подгруппа группы $PSL_2(\mathbb{R})$.

Задача 4.1. Опишите все дискретные подгруппы группы $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Задача 4.2. Любой эллиптический элемент фуксовой группы имеет конечный порядок.

Задача 4.3. Если $A \in PSL_2(\mathbb{C})$ — автоморфизм диска Пуанкаре, то

$$|A|^2 = 2\operatorname{ch}\rho\big(0, A(0)\big),$$

где ρ — расстояние Лобачевского, $|A|$ — норма матрицы A.

Задача 4.4. Подгруппа $PSL_2(\mathbb{R})$ дискретна тогда и только тогда, когда орбиты ее действия изометриями плоскости Лобачевского дискретны.

Задача 4.5. Останется ли утверждение предыдущей задачи верным, если вместо действия на плоскости Лобачевского рассмотреть действие дробно-линейными преобразованиями вещественной прямой? Указание. Верно ли это, например, для $PSL_2(\mathbb{Z})$?

▷ Напомним, что *областью Дирихле* с центром в точке x фуксовой группы G называется подмножество плоскости Лобачевского

$$D_x := \big\{z \in \mathbb{H} \mid \forall g \in G\ \rho\big(z, x\big) \leqslant \rho\big(g(z), x\big)\big\}.$$

Задача 4.6. а) Опишите (какую-нибудь) область Дирихле D для *модулярной группы* $\Gamma := PSL_2(\mathbb{Z})$.

б) Нарисуйте соответствующее замощение плоскости Лобачевского множествами $g(D)$.

Задача 4.7. Пусть G — фуксова группа, D — ее область Дирихле. Тогда соответствующее замощение плоскости Лобачевского *локально конечно*: у любой точки есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным набором множеств вида $g(D)$.