Кватернионы и вращения

▷ Будем рассматривать трехмерное пространство как множество чисто мнимых кватернионов.

Задача 6.1. а) $uv = -(u,v) \pm [u,v]$; в частности, векторное произведение равно, с точностью до умножения на константу, коммутатору соотвествующих кватернионов.

б) В какие тождества на векторное и скалярное произведение превращается ассоциативность кватернионного умножения?

▷ Как было доказано на лекции, для любого ненулевого кватерниона q преобразование $v \mapsto qvq^{-1}$ является вращением трехмерного пространства.

Задача 6.2. Отображение $SU(2) \to SO(3)$, определенное выше, является *двулистным накрытием* (т. е. оно сюръективно, а его ядро состоит из двух элементов).

▷ Будем рассматривать четырехмерное пространство как множество всех кватернионов.

Задача 6.3. Отражение 4-мерного пространства относительно 3-мерного подпространства с нормалью q имеет вид $v \mapsto -q\bar{v}q$.

▷ Как было доказано на лекции (или как следует из предыдущей задачи), любое движение из $SO(4)$ может быть записано в виде $v \mapsto lvr$ для некоторых кватернионов l и r.

Задача 6.4. Найдите ядро гомоморфизма $SU(2) \times SU(2) \to SO(4)$, определенного выше.

* * *

Задача 6.5*. Рассмотрим в четырехмерном простанстве со скалярным произведением сигнатуры $(1,3)$ множество нулевых направлений (прямых вида tv, где v — вектор нулевой нормы).

а) Это множество направлений представляет собой сферу S^2 (“звездное небо”).

б) Группа Лоренца $SO(1,3)$ действует на звездном небе преобразованиями Мёбиуса.

в) Возникающий гомоморфизм $SO^+(1,3) \to PSL(2;\mathbb{C})$ является изоморфизмом.

▷ Соответствующий гомоморфизм $SL(2;\mathbb{C}) \to SO(1,3)$ называется *спинорным отображением.*

Задача 6.6*. Найдите образ а) $SU(2)$; б) $SL(2;\mathbb{R})$ при спинорном отображении.