

Правильные многогранники

Задача 7.1. Найдите группу вращений тетраэдра.

- ▷ Напомним, что группа Sp_1 кватернионов единичной нормы двулистно накрывает группу SO_3 .

Задача 7.2. а) Опишите явно прообраз группы вращений тетраэдра при накрытии $Sp_1 \rightarrow SO_3$ (“бинарная тетраэдральная группа”).

- б) Изоморфна ли возникающая группа прямому произведению исходной группы и группы $\mathbb{Z}/2$?

Задача 7.3. Докажите, что выпуклая оболочка элементов бинарной тетраэдральной группы (как подмножества \mathbb{H}) образует правильный 4-мерный многогранник и найдите число его вершин, ребер, граней и гиперграней.

Задача 7.4. Найдите группу вращений куба.

Задача 7.5. Группа вращений додекаэдра (или икосаэдра) изоморфна группе A_5 .

- ▷ Разобьем грани додекаэдра на 6 пар противоположных. Напишем на одной из них ∞ , а на ее соседях — последовательно числа от 0 до 4.

Задача 7.6. Возникающее действие группы A_5 на множестве $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5) := \mathbb{F}_5 \cup \{\infty\}$ задает а) гомоморфизм; б) изоморфизм $A_5 \rightarrow PSL_2(\mathbb{F}_5)$.

Задача 7.7*. а) Опишите явно прообраз группы вращений икосаэдра при накрытии $Sp_1 \rightarrow SO_3$ (“бинарная икосаэдральная группа”).

- б) Постройте (чисто алгебраически) гомоморфизм из получившейся подгруппы группы $Sp_1 \cong SU_2 \subset SL_2(\mathbb{C})$ в группу $SL_2(\mathbb{F}_5)$.
в) Изоморфна ли эта группа группе $A_5 \times \mathbb{Z}/2$? группе S_5 ? группе $SL_2(\mathbb{F}_5)$?

Задача 7.8*. Докажите, что выпуклая оболочка элементов бинарной икосаэдральной группы образует правильный 4-мерный многогранник и найдите число его вершин, ребер, граней и гиперграней.

- ▷ В размерности 4 есть ровно 6 правильных многогранников: 4-симплекс, 4-куб, 4-октаэдр, “октаплекс” из задачи 2, “гиперикосаэдр” из последней задачи и двойственный ему “гипердодекаэдр”. Начиная с размерности 5 правильные многогранники исчерпываются n -симплексом, n -кубом и n -октаэдром.