Конечные проективные плоскости

▷ Пара множеств P (“точки”) и L (“прямые”) вместе с отношением $I \subset P \times L$ (“отношение инциндентности”) называется *проективной плоскостью*, если

- любым двум различным точкам инциндентна ровно одна прямая, а любым двум различным прямым инциндентна ровно одна точка;
- существуют 4 точки, никакие 3 из которых не инциндентны одной прямой.

Задача 9.1. Любые две прямые конечной проективной плоскости инциндентны одному и тому же количеству точек.

▷ Если прямая в проективной плоскости инциндентна ровно $q+1$ точке, то говорят, что эта плоскость имеет *порядок* q.

Задача 9.2. Сколько на проективной плоскости порядка q а) прямых, проходящих через данную точку; б) точек; в) прямых?

Задача 9.3. Если K — поле, то $\mathbb{P}^2(K)$ (точки — одномерные подпространства в K^3, прямые — двумерные подпространства в K^3) — проективная плоскость (порядка $|K|$).

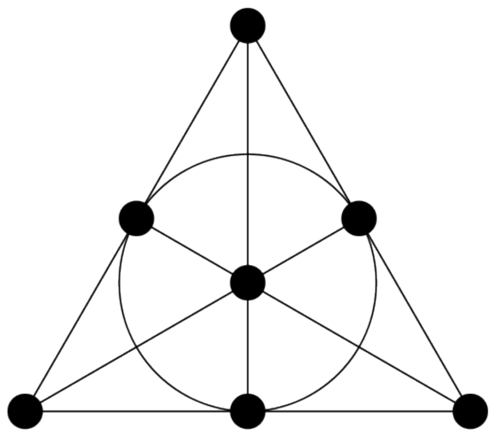
Задача 9.4*. Любая проективная плоскость, в которой выполнена теорема Дезарга, является проективной плоскостью над некоторым телом[1].

Задача 9.5*. а) Пусть $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)$, Q — множество 4-элементных подмножеств множества X. Сколько орбит у действия $PGL_2(\mathbb{F}_7)$ на Q; какие размеры они имеют?

б) Наименьшая из орбит состоит из двух орбит действия $PSL_2(\mathbb{F}_7)$.

в) Если отождествить в обеих орбитах из предыдущего пункта множество и его дополнение, а в качестве отношения инциндентности рассмотреть “пересекаться по 2 элементам”, то получится *плоскость Фано*, $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.

г) $PSL_2(\mathbb{F}_7) \cong PSL_3(\mathbb{F}_2)$.



Плоскость Фано

[1] Напомним, что тело — это “некоммутативное поле”, кольцо, в котором любой ненулевой элемент обратим.