

Проективная двойственность

- ▷ Пусть V — трехмерное пространство. Напомним, что прямые в $\mathbb{P}(V)$ суть точки в $\mathbb{P}(V^*)$ и наоборот (“*проективная двойственность*”), причем отношение инцидентности этой двойственностью сохраняется.

Совокупность касательных к данной кривой (рассматриваемая как кривая в двойственном пространстве) называется двойственной кривой.

Задача 10.1. Какая теорема двойственна теореме Чевы?

Задача 10.2. При проективной двойственности коника переходит в конику.

- ▷ Зафиксируем невырожденную квадратичную форму q на пространстве V . Как известно из курса алгебры, это задает отождествление пространства V с его двойственным, V^* . Поэтому в присутствии формы q проективно двойственную к точке $L \in \mathbb{P}(V)$ прямую l можно рассматривать как прямую в *том же* пространстве. Прямая l называется *полярной* точки L , а точка L — *полюсом* прямой l .

Задача 10.3. а) Множество всех *самосопряженных* (лежащих на своей поляре) точек образует конику C , причем любая коника получается таким образом (при подходящем выборе формы q).

б) Конику C переходит при полярной двойственности в себя.

Задача 10.4. а) Поляра точки L может быть построена, как прямая, проходящая через основания двух касательных, проведенных к конике C из этой точки.

б) Как построить¹ полярную точки, лежащей внутри коники?

Задача 10.5*. Точки пересечения сторон треугольника с полярами противоположных вершин лежат на одной прямой (“*теорема Шалля*”).

- ▷ *Корреляцией* проективной плоскости называется сохраняющая отношение инцидентности биекция, переводящая точки в прямые, а прямые в точки. *Полярным соответствием* называются корреляция, являющаяся инволюцией.

Задача 10.6. а) Любая корреляция вещественного проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ задается невырожденной билинейной формой на V .

б) Вещественные коники суть множества самосопряженных точек полярных соответствий².

¹Кроме построений одной линейкой разрешается проводить касательную к конике из данной точки.

²Рассматриваются все коники, имеющие вещественные коэффициенты, — но, возможно, и не имеющие вещественных точек.