Комбинаторика, топология и алгебра симплициальных комплексов

Антон Айзенберг
ayzenberga@gmail.com

6 апреля 2016 г.

Содержание

1 Симплициальные комплексы

1.1 Определения

В дальнейшем число элементов множества M обозначается $|M|$ либо $\sharp M$, а 2^M обозначает множество всех подмножеств множества M. Часто будет использоваться обозначение $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Определение 1.1. Симплициальным комплексом на конечном множестве вершин M называется совокупность $K \subset 2^M$ подмножеств множества M, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1. если $I \in K$ и $J \subset I$, то $J \in K$;
2. $\varnothing \in K$.

Элементы множества M называются вершинами симплициального комплекса K, элементы $I \in K$ — его симплексами, а если $i \in I$, то говорят, что i есть вершина симплекса I. Множество вершин M мы будем иногда обозначать $V(K)$. Число $|I| - 1$ называется размерностью симплекса I и обозначается $\dim I$. Размерность симплициального комплекса K есть по определению максимальная размерность его симплексов. Заметьте, что формально пустой симплекс имеет размерность -1.

Пример 1.2. Симплициальный комплекс размерности $\leqslant 1$ — это граф (без петель и кратных ребер).

Заметим, что из определения отнюдь не следует, что вершина (рассматриваемая как одноэлементное множество) является симплексом. Назовем вершину $i \in V(K)$ призрачной, если $\{i\} \notin K$. Призрачная вершина не может быть вершиной никакого симплекса в K, как легко следует из определения. Поэтому, как правило, призрачные вершины можно без особого вреда выкинуть. В дальнейшем будет предполагаться, что у симплициального комплекса нет призрачных вершин, а в тех редких случаях, когда призрачные вершины все-таки возникают и избавиться от них не получается, либо не имеет смысла, — это будет специально оговариваться.

Мы привыкли думать о графах в терминах картинок. Полезно также уметь превращать абстрактный симплициальный комплекс в картинку (т.е. в топологическое пространство). Это топологическое пространство (называемое геометрической реализацией симплициального комплекса) можно описать аналогично тому, как это делается с графом: каждой вершине $i \in M$ ставится в соответствие точка e_i, для каждого ребра $\{i, j\} \in K$ рисуется отрезок между e_i и e_j, для каждой тройки $\{i, j, k\} \in K$ рисуется треугольник, натянутый на e_i, e_j, e_k и так далее. Еще, если мы рисуем его в некотором пространстве, то хочется, чтобы этот агрегат не самопересекался, где не следует. Для этого точки e_i надо брать в достаточно общем положении в пространстве достаточно большой размерности, что является мотивацией для следующего определения.

Определение 1.3. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис пространства $\mathbb{R}^m$, и пусть $\triangle_I = \operatorname{conv}(e_i \mid i \in I)$ — симплекс, натянутый на базисные вектора, соответствующие индексам из подмножества $I \subset [m]$. Подмножество $R(K) = \bigcup_{I \in K} \triangle_I \subset \mathbb{R}^m$ называется стандартной реализацией симплициального комплекса K. Индуцированная с $\mathbb{R}^m$ топология задает на $R(K)$ структуру компактного топологического пространства. Это топологическое пространство обозначается $|K|$ и называется геометрической реализацией симплициального комплекса K.

Замечание 1.4. Имеется более канонический и прямолинейный способ определить топологическое пространство $|K|$, не использующий никаких вложений. Эта конструкция работает в более общих ситуациях и описана в Приложении A.

Определение 1.5. Симплекс $I \in K$ называется максимальным по включению, если не существует такого $J \in K$, что J строго содержит I. Симплициальный комплекс K называется чистым (или размерностно однородным) если все его максимальные по включению симплексы имеют одинаковую размерность.

Следующее определение естественно и не очень содержательно, но должно присутствовать из соображений строгости.

Определение 1.6. Симплициальные комплексы K и L называются изоморфными, если существует биекция между множествами их вершин, индуцирующая биекцию между K и L.

1.2 Первые примеры

Пусть $n\,\mathrm{pt}$ обозначает симплициальный комплекс, состоящий из n точек (формально, $n\,\mathrm{pt} = \{\varnothing, \{1\}, \ldots, \{n\}\} \subset 2^{[n]}$). Для простоты, будем писать pt вместо $1\,\mathrm{pt}$.

Обозначим через Δ_M полный симплициальный комплекс на множестве вершин M, т.е. комплекс, содержащий все подмножества множества M ($\Delta_M = 2^M$). Через $\partial\Delta_M$ будем обозначать симплициальный комплекс, который состоит из всех подмножеств множества M кроме самого M ($\partial\Delta_M = 2^M \backslash \{M\}$). Будем называть Δ_M симплексом на множестве M, а $\partial\Delta_M$ — границей симплекса на множестве M.

Читателю предлагается проверить, что стандартная реализация комплекса Δ_M — это действительно симплекс (в выпукло-геометрическом смысле), а стандартная реализация комплекса $\partial\Delta_M$ — это граница симплекса.

Пример 1.7. $\Delta_{[2]}$ — это отрезок, а $\partial\Delta_{[2]}$ — это граница отрезка, т.е. комплекс, состоящий из пары точек: $\partial\Delta_{[2]} = 2\,\mathrm{pt}$. Также имеем $\Delta_{[1]} = 1\,\mathrm{pt}$, а $\partial\Delta_{[1]}$ — это комплекс, состоящий из одной призрачной вершины.

1.3 Основные конструкции

Определение 1.8. Пусть K_1 и K_2 — симплициальные комплексы на множествах M_1 и M_2 соответственно. Джойном $K_1 * K_2$ называется симплициальный комплекс на несвязном объединении $M_1 \sqcup M_2$, чьи симплексы имеют вид $I_1 \sqcup I_2 \subset M_1 \sqcup M_2$, где $I_1 \in K_1$, $I_2 \in K_2$.

Симплициальный комплекс $K * \mathrm{pt}$ называется конусом над K (с вершиной конуса pt) и обозначается $\mathrm{Cone}\,K$. Симплициальный комплекс $K*(2\,\mathrm{pt})$ называется надстройкой над K и обозначается ΣK.

Нетрудно проверить, что $|K_1*K_2| \cong |K_1|*|K_2|$, $|\,\mathrm{Cone}\,K| \cong \mathrm{Cone}\,|K|$ и $|\Sigma K| \cong \Sigma|K|$, где в правой части стоят стандартные топологические операции джойна, конуса и надстройки топологических пространств.

В определениях ниже K — симплициальный комплекс на множестве вершин M.

Определение 1.9. Пусть $l \geqslant 0$ — целое число. Симплициальный комплекс $K^{(l)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{I \in M \mid I \in K, \dim I \leqslant l\}$ на M называется l-мерным остовом комплекса K.

Определение 1.10. Пусть $J \subset M$ — произвольное подмножество вершин. Симплициальный комплекс $K_J \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{I \subseteq J \mid I \in K\}$ называется полным подкомплексом комплекса K на множестве J.

Определение 1.11. Пусть $I \in K$. Звездой симплекса I в комплексе K называется симплициальный комплекс $\mathrm{star}_K I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{J \subset I \mid J \cup I \in K\}$. Линком симплекса I в комплексе K называется симплициальный комплекс $\mathrm{link}_K I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{J \subset M\backslash I \mid J \sqcup I \in K\}$.

Замечание 1.12. Формально, линк — это симплициальный комплекс на множестве $M\backslash I$. Однако на практике часто оказывается, что большинство из этих вершин — призрачные. Это как раз тот случай, когда не жалко все эти призрачные вершины отбросить.

Из формальных определений следует, что $\mathrm{link}_K \varnothing = K$.

Критические для понимания упражнения, которые будут использоваться в дальнейшем:

Упражнение 1.13. $\dim \mathrm{link}_K I \leqslant \dim K - |I|$. Если K чистый, то $\dim \mathrm{link}_K I = \dim K - |I|$.

Упражнение 1.14. $\mathrm{star}_K I = \Delta_I * \mathrm{link}_K I$. В частности, звезда любого непустого симплекса — стягиваема (т.е. ее геометрическая реализация стягиваема).

Упражнение 1.15. Пусть x — точка, лежащая в относительной внутренности (геометрического) симплекса $\triangle_I$. Тогда подпространство $\partial\triangle_I * |\operatorname{link}_K I|$ является деформационным ретрактом пространства $|\operatorname{star}_K I|\backslash x$

1.4 Симплициальные комплексы из многогранников

Подробную информацию о многогранниках см. в [17, 41].

Определение 1.16. Выпуклая оболочка Q конечного числа точек в $\mathbb{R}^d$ называется выпуклым многогранником. Размерностью многогранника Q называется размерность его аффинной оболочки.

Мы будем считать, что многогранник полноразмерен, т.е. $\dim Q = n$ (иными словами, у многогранника есть внутренние точки). В противном случае, вместо исходного пространства $\mathbb{R}^n$ можно взять аффинную оболочку Q, для которой это верно.

Для многогранника стандартным образом определяется грань[1]. Грани размерности 0 (соотв., 1, $n-1$) называются вершинами (соотв. ребрами, гипергранями) многогранника Q.

Определение 1.17. Многогранник Q называется симплициальным, если все его собственные грани (т.е. все, кроме самого Q) являются симплексами.

Каждый симплициальный многогранник Q позволяет построить симплициальный комплекс, вершины которого суть вершины многогранника, а симплексы — собственные грани Q (плюс пустое множество, конечно). Допуская определенную вольность терминологии, мы будем обозначать этот симплициальный комплекс ∂Q. Вольность объясняется тем, что геометрическая реализация этого комплекса, как нетрудно проверить, совпадает с топологической границей множества $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.18. n-мерный многогранник P называется простым, если каждая его вершина содержится ровно в n ребрах, или, что эквивалентно, ровно в n гипергранях.

Легко проверить, что каждая грань простого многогранника — вновь простой многогранник.

Конструкция 1.19. Имеется конструкция геометрической (или полярной) двойственности. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — многогранник, содержащий начало координат в своей внутренности. Рассмотрим подмножество $P^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ двойственного пространства, определенное следующим образом:

$$\{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, y\rangle + 1 \geqslant 0 \text{ для всех } y \in P\}.$$

[1]Грань — это непустое пересечение Q с опорной гиперплоскостью, либо сам многогранник Q. Опорная гиперплоскость — это такая аффинная гиперплоскость, что Q лежит с одной стороны от нее.

Известно, что P^* — это вновь выпуклый многогранник размерности n, причем частично упорядоченное множество граней P^* совпадает с ч.у. множеством граней P с обращенным порядком. Иными словами, каждой грани $F \subset P$, $\dim F = k$ однозначно соответствует грань $D(F) \subset P^*$, $\dim D(F) = n-k-1$, и при этом $F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow D(F_2) \subset D(F_1)$. В частности, вершинам P соответствуют гиперграни P^* и наоборот. Отсюда нетрудно вывести, что многогранники двойственные к симплициальным — простые, а двойственные к простым — симплициальные.

Поэтому каждому простому многограннику P можно поставить в соответствие симплициальный комплекс ∂P^* (границу двойственного симплициального многогранника).

В дальнейших утверждениях и задачах используется следующее соображение. Пусть $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ — гиперграни простого многогранника P, соответствующие вершинам $1, \ldots, m$ симплициального комплекса ∂P^*. Рассмотрим пересечение k различных гиперграней: $F_{i_1,\ldots,i_k} = \mathcal{F}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{i_k}$ многогранника P. Имеется альтернатива: либо $F_{i_1,\ldots,i_k} = \varnothing$ (в этом случае подмножество $\{i_1, \ldots, i_k\}$ не является симплексом комплекса ∂P^*), либо $F_{i_1,\ldots,i_k}$ есть грань многогранника P, имеющая коразмерность k (в этом случае $\{i_1, \ldots, i_k\}$ является симплексом комплекса ∂P^* — и это в точности та грань симплициального многогранника P^*, которая соответствует грани $F_{i_1,\ldots,i_k} \subset P^*$). Любая грань простого многогранника однозначно представляется в виде $\mathcal{F}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{i_k}$ для некоторого симплекса $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \partial P^*$.

Упражнение 1.20. Разобрать написанное в предыдущем абзаце на примерах: P — трехмерный куб; призма с пятиугольным основанием; додекаэдр.

Упражнение 1.21. $(P^*)^* = P$.

Упражнение 1.22. Пусть P — простой многогранник, и $F \neq \varnothing$ — его грань (как следствие, множество F само по себе является простым многогранником). Пусть $I = D(F) \subset P^*$ — грань симплициального многогранника P^*, соответствующая F. Будем рассматривать I как симплекс симплициального комплекса ∂P^*. Доказать, что симплициальный комплекс ∂F^* изоморфен линку $\operatorname{link}_{\partial P^*} I$

Упражнение 1.23. Декартово произведение двух многогранников — многогранник. Декартово произведение двух простых многогранников — простой многогранник. В этом случае, симплициальный комплекс $\partial(P \times Q)^*$ изоморфен $\partial P^* * \partial Q^*$

Вывод: понятия линка и джойна симплициальных комплексов суть естественные обобщения понятий грани и декартова произведения многогранников.

1.5 Сферы и многообразия

Граница выпуклого симплициального многогранника задает триангуляцию сферы. Однако, существуют более общие симплициальные комплексы, которые во многом похожи на сферы. Границы выпуклых многогранников мы будем для простоты называть выпуклыми сферами.

Определение 1.24. Триангуляцией сферы (размерности d) называется симплициальный комплекс K, такой что $|K| \cong S^d$. Триангуляцией многообразия называется симплициальный комплекс K, такой что $|K|$ является топологическим многообразием.

Напомним, что топологическое пространство X называется топологическим многообразием, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U \ni x$, гомеоморфная открытому подмножеству евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Также обычно требуется, чтобы X было хаусдорфовым и паракомпактным, но для $|K|$ эти свойства выполнены автоматически.

Пусть $\Bbbk$ — основное кольцо коэффициентов. Везде далее будет предполагаться, что $\Bbbk$ — это поле, либо кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ (причем, в алгебраических разделах $\Bbbk$ всегда будет полем).

Определение 1.25. Чистый симплициальный комплекс K размерности d называется гомологическим многообразием размерности d над $\Bbbk$ (соотв. ориентируемым, связным и т.д.), если таковым является его геометрическая реализация. Гомологическое многообразие K над $\Bbbk$ размерности d называется гомологической сферой (над $\Bbbk$), если K имеет гомологии (с коэффициентами в $\Bbbk$) как у d-мерной сферы.

Это определение будет для нас особенно важным, поэтому необходимо более подробное объяснение. Напомним, что (паракомпактное, хаусдорфово) топологическое пространство X называется гомологическим многообразием над $\Bbbk$ размерности d, если для любой точки $x \in X$ выполнено

$$H_j(X, X \backslash x; \Bbbk) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq d; \\ \Bbbk, & \text{если } j = d. \end{cases}$$

Предложение 1.26. *Топологическое многообразие является гомологическим многообразием.*

Доказательство. По определению топологического многообразия, у точки $x \in X$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству $\mathbb{R}^d$. Выберем в этой окрестности маленький открытый шарик B, содержащий x и пусть $Z = X \backslash B$. Тогда, по свойству вырезания, $H_j(X, X \backslash x; \Bbbk) \cong H_j(X \backslash Z, (X \backslash x) \backslash Z; \Bbbk) = H_j(B, B \backslash x; \Bbbk)$. Поскольку шарик B стягиваем, из точной последовательности пары

$$\cdots \to \widetilde{H}_j(B; \Bbbk) \to H_j(B, B \backslash x; \Bbbk) \to \widetilde{H}_{j-1}(B \backslash x; \Bbbk) \to \widetilde{H}_{j-1}(B; \Bbbk) \to \cdots$$

заключаем, что $H_j(B, B \backslash x; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{j-1}(B \backslash x; \Bbbk)$. Пространство $B \backslash x$ гомотопически эквивалентно $(d-1)$-мерной сфере, а значит его приведенные гомологии тривиальны в размерностях $j \neq d-1$ и изоморфны $\Bbbk$ в размерности $d-1$. Значит $H_j(X, X \backslash x; \Bbbk) = 0$, при $j \neq d$, и $H_d(X, X \backslash x; \Bbbk) = \Bbbk$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1.27. Приведенное в доказательстве рассуждение должно убедить в справедливости следующего факта: группы $H_*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ описывают свойства пространства X в сколь угодно малой окрестности точки x (т.е. локальные свойства). Поэтому часто группу $H_*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ называют группой локальных гомологий (а $H^*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ — локальными когомологиями).

Итак, чтобы проверить, что некое пространство является гомологическим многообразием, надо перебрать все его точки, и посчитать для каждой из них локальные гомологии. К счастью, когда мы работаем с геометрическими реализациями симплициальных комплексов, достаточно перебирать лишь конечное множество точек.

Для начала сформулируем полезную лемму. Пусть K — произвольный симплициальный комплекс и $I \in K$, $I \neq \varnothing$. Напомним, что $\triangle_I$ обозначает геометрический симплекс, являющийся подмножеством геометрической реализации $|K|$. Обозначим его относительную внутренность через $\triangle_I^\circ$ (имеем $\triangle_I^\circ = \triangle_I \backslash \bigcup_{J \subsetneq I} \triangle_J$). Тогда для любой точки $x \in |K|$ однозначно определен непустой симплекс, во внутренности которого она лежит.

Лемма 1.28 (см. Prop.2.2.14 в [14]). *Пусть $x \in |K|$ лежит во внутренности симплекса $I \in K$. Тогда $H_j(|K|, |K|\backslash x; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{j-|I|}(\operatorname{link}_K I; \Bbbk)$.*

Доказательство. Имеем

$$H_j(|K|, |K|\backslash x; \Bbbk) \cong H_j(|\operatorname{star}_K I|, |\operatorname{star}_K I|\backslash x; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{j-1}(|\operatorname{star}_K I|\backslash x; \Bbbk) \cong$$
$$\cong \widetilde{H}_{j-1}(\partial\triangle_I * |\operatorname{link}_K I|; \Bbbk) \cong \widetilde{H}_{j-|I|}(|\operatorname{link}_K I|; \Bbbk). \quad (1.1)$$

Первый изоморфизм — свойство вырезания (из пары $(|K|, |K|\backslash x)$ вырезается дополнение к звезде симплекса I). Второй изоморфизм следует из гомологической точной последовательности пары и того факта, что звезда — стягиваема (упр.1.14). Третий изоморфизм следует из того, что $|\operatorname{star}_K I|\backslash x$ гомотопически эквивалентно $\partial\triangle_I * |\operatorname{link}_K I|$ (упр.1.15). Последний изоморфизм — итерированный изоморфизм надстройки. □

Получаем простой вычислительный критерий, когда симплициальный комплекс является гомологическим многообразием.

Предложение 1.29. *Симплициальный комплекс K размерности d является гомологическим многообразием размерности d тогда и только тогда, когда $\widetilde{H}_j(\operatorname{link}_K I; \Bbbk) = 0$ для всех непустых симплексов $I \in K$, $I \neq \varnothing$ и $j < d - |I|$.*

Доказательство. Заметим, что $\widetilde{H}_j(\operatorname{link}_K I; \Bbbk) = 0$ при $j > d - |I|$ по соображением размерности (см. упражнение 1.13). Остальное следует из Леммы 1.28. □

Предложение 1.30. *Симплициальный комплекс K размерности d является гомологической сферой тогда и только тогда, когда $\widetilde{H}_j(\operatorname{link}_K I; \Bbbk) = 0$ для всех симплексов $I \in K$ и $j < d - |I|$.*

Доказательство. Единственное отличие этого утверждения от предыдущего в том, что пустой симплекс $I = \varnothing$ включен в рассмотрение. Поскольку $\operatorname{link}_K \varnothing = K$, утверждение напрямую следует из определения. □

1.6 Распознаваемость

В предыдущих разделах были, среди прочего, определены три класса симплициальных комплексов: выпуклые сферы (границы выпуклых симплициальных многогранников), триангулированные сферы и гомологические сферы. Каждый следующий класс строго содержит предыдущий в размерностях начиная с 3 (для двумерных сфер все эти понятия совпадают — упражнение).

Замечание 1.31. Также за рамками этого спецкурса остается еще один класс — PL-сферы, — являющийся более общим, чем выпуклые сферы, и более частным, чем триангулированные сферы. То, что включения всех классов строгие — нетривиальный факт, о котором можно прочитать, например, в [13]. См. также упражнения в конце этого подраздела.

Хотя триангулированные сферы являются в некотором смысле наиболее естественным классом, их в дальнейшем мы обсуждать не будем. Причин две. Во-первых, большинство утверждений, обсуждаемых далее, имеют гомологическую природу, и уж если они верны для топологических сфер, то как правило верны и для гомологических сфер (а открытые гипотезы открыты для обоих классов одновременно). Во-вторых, топологические сферы нельзя распознать, в отличие от гомологических и выпуклых.

Теорема 1.32 (Теорема Новикова о нераспознаваемости сфер [15, §10])**.** *Пусть $|K|$ — d-мерное многообразие, $d \geqslant 5$. Не существует алгоритма, проверяющего справедливость утверждения $|K| \cong S^d$.*

Иными словами, не существует общего способа определить, является ли симплициальный комплекс топологической сферой. Однако определить, является ли комплекс гомологической сферой, — задача вполне решаемая: достаточно перебрать все линки и для каждого из них посчитать гомологии. Это можно сделать на компьютере и для этого есть разный софт[2].

Задача распознавания выпуклых сфер также алгоритмически разрешима. Верен даже более общий факт. Назовем абстрактной схемой на конечном множестве M произвольный набор подмножеств множества M, содержащий все одноэлементные подмножества и не содержащий само M. Каждый выпуклый многогранник P задает схему, элементы которой имеют вид $\mathrm{Vert}(F)$, где F — собственная грань P. Такие схемы будем называть реализуемыми. В частности, если многогранник симплициален, то его схема по определению совпадает с симплициальным комплексом ∂P.

Теорема 1.33 (см. Грюнбаум, sect.5.5)**.** *Существует алгоритм, который определяет, реализуема данная схема при помощи выпуклого многогранника или нет.*

Эта теорема опирается на алгоритм Тарского в математической логике, позволяющий определить истинность или ложность любой замкнутой арифметической формулы первого порядка с вещественными переменными. Вывод теоремы 1.33 из теоремы Тарского см. в [17]. О теореме Тарского можно прочитать в [25].

[2]Например, есть среда GAP и в ней есть пакет simpcomp, умеющий вычислять симплициальные гомологии

Упражнение 1.34. Стандартный пример гомологической сферы, не являющейся топологической сферой, — сфера Пуанкаре. Как гладкое многообразие ее можно построить, взяв фактор группы SO(3) (движения пространства $\mathbb{R}^3$, сохраняющие ориентацию) по подгруппе движений, сохраняющих икосаэдр (фактор в смысле действия умножением слева). Обозначим это многообразие через M. Известно, что $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а группа собственных движений икосаэдра изоморфна A_5 — группе четных перестановок пяти элементов. Значит, $\pi_1(M)$ вписывается в короткую точную последовательность групп $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \pi_1(M) \to A_5 \to 1$. Группа $\pi_1(M)$ называется бинарной группой икосаэдра. Известно, что коммутант этой группы совпадает с ней самой, и, поскольку $H_1(M;\mathbb{Z})$ есть абелианизация $\pi_1(M)$, получаем, что $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$. Многообразие M — замкнуто, компактно и ориентируемо, значит $H_2(M;\mathbb{Z}) = 0$ и $H_3(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ по двойственности Пуанкаре. Значит, M является гомологической сферой (над $\mathbb{Z}$ и над любым полем). При этом M не гомеоморфно S^3 (фундаментальная группа сферы тривиальна, а у M — нет). Заметим напоследок, что любое компактное гладкое многообразие можно триангулировать, а значит можно считать, что $M = |K|$ для некоторого симплициального комплекса K.

Замечание 1.35. Есть явные примеры триангулированных сфер, не являющихся границами выпуклых многогранников: например, сфера Барнетта и сфера Брюкнера [6]. Более того, зачастую невыпуклые сферы производят китайским методом: сразу много, дешево, но с некоторой долей брака. Например, существует конструкция сферы Бира [8], которая позволяет по любому симплициальному комплексу L построить триангулированную сферу $\mathrm{Bier}(L)$. Подсчитано, что асимптотически эта конструкция производит гораздо больше сфер, чем существует выпуклых симплициальных многогранников (с точностью до эквивалентностей). А это значит, что почти все сферы Бира — невыпуклые. Правда, естественный вопрос "а какие конкретно сферы Бира — невыпуклы?" пока остается открытым.

Пример 1.36. Теорема Кэннона–Эдвардса (см. [13, Теор.2.43 и ссылки]) утверждает, что двукратная надстройка над гомологической сферой является топологической сферой. Используя этот факт и упражнение 1.22, доказать, что двукратная надстройка над любой триангуляцией сферы Пуанкаре не является выпуклой сферой.

2 Числа граней

Положим $n = \dim K + 1$. Пусть f_j — число j-мерных симплексов в K. Формально имеем $f_{-1} = 1$ (поскольку пустое множество является симплексом размерности -1). Набор $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ называется f-вектором симплициального комплекса K.

Центральная тема курса такова: какими свойствами обладают f-векторы симплициальных комплексов заданного класса (например, триангуляций сфер или триангуляций многообразий)?

2.1 Теорема Катоны–Краскэла–Шутценбергера

Полная характеризация f-векторов всех возможных симплициальных комплексов дается теоремой Катоны–Краскэла–Шутценбергера.

Упражнение 2.1. Пусть N, j — два положительных целых числа. Тогда существует единственный способ записать N в виде

$$N = \binom{n_j}{j} + \binom{n_{j-1}}{j-1} + \cdots + \binom{n_k}{k}, \text{ где } n_j > n_{j-1} > \cdots > n_k \geqslant k \geqslant 1.$$

Используя запись через биномиальные коэффициенты, описанную в упражнении, определим число

$$N^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n_j}{j+1} + \binom{n_{j-1}}{j} + \cdots + \binom{n_k}{k+1}.$$

Теорема 2.2 (Теорема Катоны–Краскэла–Шутценбергера[3])**.** *Последовательность целых чисел $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ является f-вектором симплициального комплекса тогда и только тогда, когда $0 \leqslant f_j \leqslant f_{j-1}^{(j)}$ при $1 \leqslant j \leqslant n-1$.*

Есть менее точный, но легче запоминаемый аналог этой теоремы. Пусть $\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\cdots(x-j+1)}{j!}$ для произвольного $x \in \mathbb{R}$. Функция $\binom{x}{j}$ строго возрастает при $x > j-1$.

Теорема 2.3 (Ловаш, [3])**.** *Пусть f_j — f-числа симплициального комплекса K. Пусть $f_{j-1} = \binom{x}{j}$, $x \geqslant j$. Тогда $f_j \leqslant \binom{x}{j+1}$.*

2.2 h-вектор

Определение 2.4. Определим числа $h_0, h_1, \ldots, h_n$ по формуле

$$\sum_{j=0}^{n} h_j t^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} f_{j-1}(t-1)^{n-j}, \tag{2.1}$$

где t — формальная переменная. Набор чисел $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ называется h-вектором симплициального комплекса K.

Заметим, что формулу (2.1) можно использовать и в обратную сторону, т.е., зная h-вектор, можно вычислить f-вектор. Таким образом, f- и h-векторы несут одну и ту же информацию, поэтому задача характеризации f-векторов эквивалентна задаче характеризации h-векторов. Однако с h-векторами, как мы убедимся в дальнейшем, намного удобнее работать. Формулу (2.1) можно переписать в виде

$$h_l = \sum_{j \leqslant l} (-1)^{l-j} \binom{n-j}{n-l} f_{j-1}, \qquad f_{l-1} = \sum_{j \leqslant l} \binom{n-j}{n-l} h_j. \tag{2.2}$$

На практике удобно вычислять h-вектор, пользуясь мнемонической схемой:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & f_0 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & f_1 & & & & \\
 & & & & & & x & & y & & & & & \\
 & & & & & & \searrow & & \swarrow & & & & & \\
 & & 1 & & & & & y-x & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & f_{n-1} \\
h_0 & & h_1 & & h_2 & & & & & & & & h_n &
\end{array}
$$

По левой боковой стороне треугольника пишутся единицы, по правой стороне f-вектор, и треугольник заполняется по правилу: под каждыми двумя элементами пишется их разность. В основании треугольника получится h-вектор.

Замечание 2.5. Видно, что в линейном преобразовании, выражающем f-вектор через h-вектор все коэффициенты неотрицательны. У этого факта есть важное следствие. Пусть K и L — два симплициальных комплекса одинаковой размерности и пусть h-вектор K меньше h-вектора L (покомпонентно). Тогда f-вектор K также меньше f-вектора L.

Упражнение 2.6. Найти h-вектор симплекса, границы симплекса, границы кросcполитопа. Граница кросcполитопа — это симплициальный комплекс $(2\,\mathrm{pt}) * (2\,\mathrm{pt}) * \cdots * (2\,\mathrm{pt})$ — джойн n двоеточий. Кросcполитоп — это многогранник, двойственный к n-мерному кубу (то есть многомерный аналог октаэдра).

2.3 Соотношения Дена–Соммервилля

Теорема 2.7 (Соотношения Дена–Соммервилля для сфер)**.** *Пусть K — гомологическая сфера размерности $n-1$. Тогда $h_j = h_{n-j}$.*

Теорема 2.8 (Обобщенные соотношения Дена–Соммервилля для многообразий)**.** *Пусть K — гомологическое многообразие размерности $n-1$. Тогда*

$$h_{n-j} - h_j = (-1)^j \binom{n}{j} (\chi(K) - \chi(S^{n-1}))$$

Замечание 2.9. Расписав формулу (2.1), легко убедиться, что соотношение $h_0 = h_n$ для сферы превращается в $1 = f_{n-1} - f_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} f_0 + (-1)^n$. Это есть констатация того факта, что эйлерова характеристика (гомологической) $(n-1)$-сферы равна $1 + (-1)^{n-1}$. Аналогично, соотношение Дена–Соммервилля для многообразия, соответствующее $j = 0$, есть просто определение эйлеровой характеристики.

Доказательство. Мы докажем обе теоремы одновременно, используя индукцию. Основная идея — использование производящей функции, причем удобным оказывается использовать производящую функцию от двух переменных. Эта идея восходит к работе [11].

Вначале рассмотрим группу $\mathcal{SC}_n$, свободно порожденную всеми чистыми симплициальными комплексами размерности $n-1$. Определим гомоморфизм $d\colon \mathcal{SC}_n \to \mathcal{SC}_{n-1}$, задав его на образующих следующим образом:

$$dK \overset{\text{def}}{=} \sum_{v\in \mathrm{Vert}(K)} \mathrm{link}_K\{v\}.$$

Пусть $\mathbb{Z}[\alpha, t]$ — кольцо многочленов от двух переменных и пусть $\mathbb{Z}[\alpha, t]_n$ — его однородная компонента степени n. Каждому симплициальному комплексу K размерности $n-1$ можно поставить в соответствие f-многочлен от двух переменных:

$$F(K) \overset{\text{def}}{=} f_{-1}\alpha^n + f_0\alpha^{n-1}t^1 + \dots + f_{n-1}t^n \in \mathbb{Z}[\alpha, t]_n.$$

Продолжая по линейности, получаем гомоморфизм групп $F\colon \mathcal{SC}_n \to \mathbb{Z}[\alpha, t]_n$.

Лемма 2.10. *Для любого чистого симплициального комплекса K выполнено $F(dK) = \frac{\partial}{\partial t}F(K)$. Иными словами, диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{SC}_n & \xrightarrow{F} & \mathbb{Z}[\alpha, t]_n \\
\big\downarrow{\scriptstyle d} & & \big\downarrow{\scriptstyle \frac{\partial}{\partial t}} \\
\mathcal{SC}_{n-1} & \xrightarrow{F} & \mathbb{Z}[\alpha, t]_{n-1}
\end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}F(K) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{I\in K}\alpha^{n-|I|}t^{|I|} = \sum_{I\in K}|I|\alpha^{n-|I|}t^{|I|-1},$$

$$F(dK) = F\left(\sum_{i\in \mathrm{Vert}(K)} \mathrm{link}_K\{i\}\right) = \sum_{i\in \mathrm{Vert}(K)}\ \sum_{I\in \mathrm{link}_K\{i\}} \alpha^{n-1-|I|}t^{|I|}.$$

Перепишем условие $i \in \mathrm{Vert}(K), I \in \mathrm{link}_K\{i\}$ как $J \in K, i \in J$, где $J = I \sqcup \{i\}$ (J является симплексом комплекса K по определению линка), и, как следствие, $|J| = |I|+1$. Тогда, продолжив предыдущую формулу, получим:

$$F(dK) = \sum_{J\in K, i\in J} \alpha^{n-1-(|J|-1)}t^{|J|-1} = \sum_{J\in K}|J|\alpha^{n-|J|}t^{|J|-1},$$

что совпадает с $\frac{\partial}{\partial t}F(K)$. □

Введем H-многочлен $H(K)(\alpha, t) \overset{\text{def}}{=} F(K)(\alpha - t, t)$. Нетрудно проверить, что $H(K)(\alpha, t) = h_0\alpha^n + h_1\alpha^{n-1}t^1 + \dots + h_nt^n$. Как и ранее, по линейности получаем гомоморфизм

$H\colon \mathcal{SC}_n \to \mathbb{Z}[\alpha,t]_n$. Заметим, что при замене $(\alpha,t) \rightsquigarrow (\alpha-t,t)$ дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ переходит в дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}$, который мы для простоты обозначим ∂. Из леммы 2.10 следует, что $H(dK)=\partial H(K)$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{SC}_n \arrow[r, "H"] \arrow[d, "d"] & \mathbb{Z}[\alpha,t]_n \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}"] \\ \mathcal{SC}_{n-1} \arrow[r, "H"] & \mathbb{Z}[\alpha,t]_{n-1} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Теоремы, которые мы хотим доказать, в новых терминах принимают следующий вид: для любой гомологической сферы K выполнено $H(K)(\alpha,t)=H(K)(t,\alpha)$, а для любого многообразия: $H(K)(\alpha,t)-H(K)(t,\alpha)=(\chi(K)-\chi(S^{n-1})\cdot(t-\alpha)^n$.

Докажем это индукцией по n. База $n=1$ легко проверяется. Пусть K — гомологическое многообразие размерности $n-1$. Заметим, что линки всех вершин гомологического многообразия являются (по определению!) гомологическими сферами меньшей размерности, а значит по предположению индукции для них выполнены соотношения Дена–Соммервилля. Отсюда получаем, что $\partial H(K)$ является симметрическим многочленом от α и t. Рассмотрим многочлен $Q(\alpha,t)=H(K)(\alpha,t)-H(K)(t,\alpha)$. Поскольку перестановка переменных $\alpha\leftrightarrow t$ переводит оператор $\partial=\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}$ в себя, то легко проверить, что $\partial Q=0$. Из простейшей теории уравнений в частных производных получаем, что Q есть функция от $t-\alpha$, а поскольку Q — это однородный многочлен степени n, то имеем $Q=C(t-\alpha)^n$, где C — некоторая константа. Чтобы найти C, подставим в Q значения $\alpha=1$, $t=0$. Получим

$$C\cdot(-1)^n=Q(1,0)=H(K)(1,0)-H(K)(0,1)=F(K)(1,0)-F(K)(-1,1).$$

Из определения многочлена F следует, что $F(K)(1,0)=1$ и $F(K)(-1,1)=(-1)^n+(-1)^{n-1}\chi(K)$. Значит, $C=\chi(K)-1+(-1)^n=\chi(K)-\chi(S^{n-1})$ и в итоге

$$H(K)(\alpha,t)-H(K)(t,\alpha)=Q(\alpha,t)=(\chi(K)-\chi(S^{n-1}))(t-\alpha)^n,$$

что доказывает соотношения Дена–Соммервилля для многообразий. Если K — гомологическая сфера, то $\chi(K)-\chi(S^{n-1})=0$, а значит $H(K)(\alpha,t)=H(K)(t,\alpha)$. Это завершает доказательство шага индукции. □

2.4 Неравенства на h-числа сфер

Следующие две теоремы элементарно формулируются, но в их доказательствах не обойтись без нетривиальной алгебры (насколько мне известно, элементарных доказательств пока не придумано). Доказательствам будет посвящена следующая глава.

Теорема 2.11 (Теорема о неотрицательности)**.** *Все h-числа гомологической сферы неотрицательны.*

Теорема 2.12 (Теорема о верхней границе)**.** *Пусть K — гомологическая сфера размерности $n-1$, имеющая m вершин. Тогда $h_j \leqslant \binom{m-n+j-1}{j}$.*

Замечание 2.13. Заметим, что по определению h-чисел, $h_1 = f_0 - n = m - n$, поэтому в ТВГ неравенство на h_1 на самом деле является равенством.

Обе сформулированные теоремы были вначале доказаны для выпуклых сфер, а для произвольных гомологических сфер в течение какого-то времени оставались гипотезами. Приведем идею доказательства теоремы о неотрицательности для выпуклых сфер.

Неотрицательность в выпуклом случае. Пусть K — граница выпуклого симплициального n-мерного многогранника Q и пусть $P = Q^*$ — двойственный простой многогранник. Будем считать, что P лежит в пространстве $V \cong \mathbb{R}^n$. Линейная функция $\phi\colon V \to \mathbb{R}$ называется функцией Морса (относительно P), если ее значения на всех вершинах многогранника P различны. Фиксируем какую-нибудь функцию Морса (хотя бы одна, очевидно, существует). Ориентируем все ребра многогранника P так, чтобы стрелочки шли от вершины с меньшим значением функции ϕ к вершине с большим значением. В каждой вершине $v \in \mathrm{Vert}(P)$ сходятся n ребер. Скажем, что вершина $v \in \mathrm{Vert}(P)$ имеет индекс j, если из нее выходят j ребер (а входят, следовательно, $n-j$). Тогда утверждается, что количество вершин многогранника P, имеющих индекс j, равно в точности h_j (упр., либо см. [13]). Отсюда следует, что $h_j \geqslant 0$.

Заметим, что из этого соображения и соотношения Дена–Соммервилля доказываются очень просто. Первым делом заметим, что число вершин индекса j не зависит от выбора функции Морса, поскольку это число равно h_j. Теперь заменим функцию Морса ϕ на $-\phi$. В этом случае направления всех стрелочек поменяются, а значит вершины, имевшие индекс j относительно ϕ будут иметь индекс $n-j$ относительно $-\phi$, и следовательно $h_j = h_{n-j}$. □

Замечание 2.14. К теореме о верхней границе необходим комментарий. Будем рассматривать всевозможные выпуклые симплициальные многогранники размерности n. Очевидно, что число граней (какой угодно размерности) можно сделать сколь угодно большим. Однако, если мы фиксируем число вершин $f_0 = m$, то все прочие f-числа уже не могут быть сколь угодно большими. Удивительно, но оказывается, что существует многогранник (размерности n с m вершинами), который максимизирует все f-числа. Он называется циклическим многогранником и строится следующим образом.

Рассмотрим кривую $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (t, t^2, \ldots, t^n)$, называемую кривой моментов. Если $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, то $L(t_1), \ldots, L(t_m)$ — набор различных точек на кривой моментов. Их выпуклая оболочка называется циклическим многогранником и обозначается $C_{n,m}$. Известно, что $C_{n,m}$ — симплициальный многогранник, имеющий ровно m вершин (т.е. ни одна из точек не попадает в выпуклую оболочку остальных), а его комбинаторный тип не зависит от выбора точек на кривой моментов. Оказывается, что для любого симплициального многогранника Q размерности n с m вершинами выполнено $h_j(Q) \leqslant h_j(C_{n,m})$ и, как следствие, (см. замечание 2.5) $f_j(Q) \leqslant f_j(C_{n,m})$.

Предложение 2.15. *$h_j(C_{n,m}) = \binom{m-n+j-1}{j}$ при $j \leqslant [n/2]$ (h-числа при $j > [n/2]$ находятся из соотношений Дена–Соммервилля).*

Доказательство. Известно, что $C_{n,m}$ является смежностным, то есть любые $[n/2]$ его вершин образуют грань (см. [13, Теор.1.15]). Поэтому $f_{j-1} = \binom{m}{j}$ при $j \leqslant [n/2]$. Вычислим h_l при $l \leqslant [n/2]$ по формуле (2.2):

$$h_l = \sum_{j \leqslant l} (-1)^{l-j} \binom{n-j}{n-l} \binom{m}{j} = \binom{m-n+l-1}{l}.$$

Последнее равенство есть нехитрая комбинаторная выкладка, которую можно извлечь, например, перемножив формальные ряды

$$(1+t)^m = \sum_s \binom{m}{s} t^s \quad \text{и} \quad \frac{1}{(1+t)^{n-l+1}} = \sum_s (-1)^s \binom{n-l+s}{n-l} t^s.$$

□

Долгое время было непонятно, максимизирует ли циклический многогранник f-числа только на классе выпуклых сфер, или же на более общем классе. Теорема о верхней границе утверждает, что циклический многогранник максимизирует h-числа всех сфер. Мы докажем ее алгебраическим методом в следующем параграфе.

3 Алгебры Стенли–Райснера 1

3.1 Ряд Гильберта–Пуанкаре алгебры Стенли–Райснера

Рассмотрим алгебру многочленов от m переменных $\Bbbk[v_1, \dots, v_m]$. Эта алгебра градуирована, где мы полагаем $\deg v_i = 2$. Для удобства будем обозначать ее $\Bbbk[m]$. Напомним, что как и ранее $n = \dim K + 1$.

Определение 3.1. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Алгеброй Стенли–Райснера симплициального комплекса K называется фактор-алгебра

$$\Bbbk[K] \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk[m]/(v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k}, \text{ где } \{i_1, \dots, i_k\} \notin K).$$

На этой алгебре имеется естественная градуировка, индуцированная из $\Bbbk[m]$. Каноническое отображение проекции $\Bbbk[m] \to \Bbbk[K]$ делает алгебру Стенли–Райснера модулем над кольцом $\Bbbk[m]$.

Предложение 3.2.

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K]; t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f_{j-1} t^{2j}}{(1-t^2)^j} = \frac{h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n}}{(1-t^2)^n}.$$

Доказательство. Мономы, выживающие в $\Bbbk[K]$, имеют вид $v_{i_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_j}^{\alpha_j}$, где $\{i_1, \ldots, i_j\} \in K$. Следовательно, каждый $(j-1)$-мерный симплекс $\{i_1, \ldots, i_k\} \in K$ вносит в ряд Гильберта вклад $\frac{t^{2i}}{(1-t^2)^i}$, откуда следует первое равенство. Второе равенство — прямое следствие из определения h-чисел. $\square$

Следствие 3.3. *Размерность Крулля алгебры $\Bbbk[K]$ равна $n = \dim K + 1$.*

Доказательство. С одной стороны, при $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \in K$ имеем алгебраически независимые элементы $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in \Bbbk[K]$, значит $\dim \Bbbk[K] \geqslant n$. С другой стороны, если бы существовал набор из $s > n$ алгебраически независимых элементов, то функция Гильберта $a(j) = \dim \Bbbk[K]_{2j}$ росла бы как многочлен степени $s-1 > n-1$. Из утверждения 3.2, легко следует, что $a(j)$ растет как многочлен степени не больше $n-1$. $\square$

Упражнение 3.4. Доказать, что $\Bbbk[K * L] \cong \Bbbk[K] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[L]$.

3.2 Векторные раскраски и линейные системы параметров

Как и ранее, K — симплициальный комплекс на $[m]$, $\dim K = n-1$. Пусть $\Bbbk$ — поле. Отображение $\lambda\colon [m] \to \Bbbk^n$ назовем векторной раскраской. Векторная раскраска называется правильной (или характеристической функцией), если для любого симплекса $\{i_1, \ldots, i_s\} \in K$ векторы $\lambda(i_1), \ldots, \lambda(i_s)$ линейно независимы.

Запишем каждый вектор $\lambda(i)$, $i \in [m]$ как вектор-столбец $\lambda(i) = (\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,n})^{\perp}$ (в каком-нибудь фиксированном базисе $\Bbbk^n$). Имея прямоугольную матрицу $(\lambda_{i,j})_{i\in[m], j=1,\ldots,n}$ можно определить n линейных элементов алгебры Стенли–Райснера:

$$\theta_j = \lambda_{1,j}v_1 + \lambda_{2,j}v_2 + \cdots + \lambda_{m,j}v_m \in \Bbbk[K]_2, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Конструкцию можно обратить: имея n линейных элементов алгебры Стенли–Райснера, можно построить векторную раскраску.

Предложение 3.5. *Последовательность $\theta_1, \ldots, \theta_n$ является линейной системой параметров в $\Bbbk[K]$ тогда и только тогда, когда $\lambda\colon [m] \to \Bbbk^n$ — правильная векторная раскраска.*

Доказательство. Пусть $I \in K$. Рассмотрим алгебру $\Bbbk[I] = \Bbbk[v_i \mid i \in I]$. Имеем естественный эпиморфизм $p_I\colon \Bbbk[K] \to \Bbbk[I]$, $v_i \mapsto v_i$, если $i \in I$, $v_i \mapsto 0$, иначе. Несложно проверить, что $\bigoplus_{I\in K} p_I\colon \Bbbk[K] \to \bigoplus_{I\in K} \Bbbk[I]$ инъективно. Обозначим $\theta_i^I = p_I(\theta_i) \in \Bbbk[I]_2$.

Пусть $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — конечномерно и $|I| = n$. Тогда $\Bbbk[I]/(\theta_1^I, \ldots, \theta_n^I)$ тоже конечномерно из сюръективности p_I. Значит $\theta_1^I, \ldots, \theta_n^I$ должны линейно порождать $\Bbbk[I]_2 = \langle v_i \mid i \in I\rangle$. Это в точности означает, что $\lambda(i)$, $i \in I$ линейно независимы.

Наоборот, если $\lambda(i)$, $i \in I$ линейно независимы, то векторное пространство $\Bbbk[I]/(\theta_1^I, \ldots, \theta_n^I)$ конечномерно для всех I. Значит $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, которое является подпространством в сумме $\bigoplus_{I\in K} \Bbbk[I]/(\theta_1^I, \ldots, \theta_n^I)$ тоже конечномерно, а значит $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — система параметров. $\square$

Замечание 3.6. Заметим, что, если $|\Bbbk| = \infty$, то правильная векторная раскраска всегда существует. Действительно, в этом случае в $\Bbbk^n$ можно выбрать сколь угодно много векторов, любые n из которых образуют базис, а значит условие на правильность раскраски будет выполнено автоматически. С другой стороны, существование линейной системы параметров над бесконечным полем следует также из леммы Нетер о нормализации (см. Приложение B).

Замечание 3.7. Над конечными полями правильной раскраски (а заодно и линейной системы параметров) может и не быть. Однако можно рассматривать раскраски со значениями в $\Bbbk^r$, где $r > n$ и спросить, при каком минимальном r существует правильная раскраска. Полученный аналог хроматического числа исследуется в теории инвариантов Бухштабера, однако, имеет ли он какой-нибудь смысл в терминах алгебры Стенли–Райснера пока неизвестно.

В дальнейшем мы будем предполагать, что линейная система параметров существует, поскольку всегда можно заменить поле $\Bbbk$ на его бесконечное расширение (все алгебраические конструкции хорошо себя ведут относительно расширения поля коэффициентов).

Далее $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Bbbk[K]$ всегда обозначает линейную систему параметров.

3.3 Комплексы Коэна–Маколея

Про алгебры и модули Коэна–Маколея и Горенштейна см. Приложение B.

Определение 3.8. Симплициальный комплекс K размерности $n-1$ называется комплексом Коэна–Маколея над $\Bbbk$, если $\widetilde{H}_j(\mathrm{link}_K\, I; \Bbbk) = 0$ для всех $I \in K$ (включая $I = \varnothing$) и $j < n - 1 - |I|$.

Упражнение 3.9. Комплекс Коэна–Маколея является чистым симплициальным комплексом.

Замечание 3.10. Любая гомологическая сфера является комплексом Коэна–Маколея.

Теорема 3.11 (Теорема Райснера)**.** *K является комплексом Коэна–Маколея над $\Bbbk$ тогда и только тогда, когда $\Bbbk[K]$ является алгеброй Коэна–Маколея.*

Доказательство будет позже.

Следствие 3.12. *Для комплексов Коэна–Маколея выполнено*

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n); t) = \sum_{j=0}^{n} h_j t^{2j}$$

Доказательство. Поскольку $\Bbbk[K]$ — алгебра Коэна–Маколея, она является градуированным свободным модулем над своей подалгеброй $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n]$. Следовательно,

$$\mathrm{Hilb}(\Bbbk[K]; t) = \mathrm{Hilb}(\frac{\Bbbk[K]}{(\theta_1, \ldots, \theta_n)}; t) \cdot \mathrm{Hilb}(\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n]; t).$$

Используя равенство $\mathrm{Hilb}(\Bbbk[\theta_1,\dots,\theta_n];t)=\frac{1}{(1-t^2)^n}$ и Предложение 3.2, получаем требуемое. $\square$

Следствие 3.13. *h-числа симплициального комплекса Коэна–Маколея неотрицательны и удовлетворяют неравенствам $h_j \leqslant \binom{m-n+j-1}{j}$.*

Доказательство. h_j равно размерности $2j$-й компоненты алгебры $\Bbbk[K]/(\theta_1,\dots,\theta_n)$, откуда следует неотрицательность. Коммутативная алгебра $\Bbbk[K]/(\theta_1,\dots,\theta_n)$ порождена компонентой степени 2, которая имеет размерность $m-n$. Значит размерность $2j$-й компоненты не превосходит числа коммутативных мономов степени j от $m-n$ переменных. Это число есть в точности $\binom{m-n+j-1}{j}$. $\square$

В итоге, поскольку сферы являются комплексами Коэна–Маколея, мы доказали теорему о неотрицательности и теорему о верхней границе для сфер (Теоремы 2.11 и 2.12).

Упражнение 3.14. Доказать, что любой остов симплекса является комплексом Коэна–Маколея.

Упражнение 3.15. Доказать, что любой остов комплекса Коэна–Маколея является комплексом Коэна–Маколея.

Замечание 3.16. Сферы являются самыми естественными примерами комплеков Коэна–Маколея. В общем, комплекс Коэна–Маколея можно охарактеризовать как комплекс, который гомологичен букету сфер, и все линки которого тоже таковы. С первого взгляда непонятно, откуда еще, кроме как из триангуляций сфер, можно получать такие комплексы. Однако, есть еще один широкий класс примеров: матроиды. Вместо того, чтобы дать определение матроида, лучше приведем пример.

Пусть $w_1,\dots,w_m$ — произвольный набор векторов в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем. Определим такой симплициальный комплекс на $[m]$: скажем, что $\{i_1,\dots,i_k\}\in K$ в том и только том случае, когда векторы $w_{i_1},\dots,w_{i_k}$ — линейно независимы. Тогда K — комплекс Коэна–Маколея (см. [34]). Матроиды являются абстрактным обобщением приведенной конструкции.

3.4 М-последовательности

Пусть

$$N=\binom{n_j}{j}+\binom{n_{j-1}}{j-1}+\dots+\binom{n_k}{k},\ \text{где } n_j>n_{j-1}>\dots>n_k\geqslant k\geqslant 1.$$

— разложение числа из упражнения 2.1. Определим

$$N^{\langle j\rangle}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\binom{n_j+1}{j+1}+\binom{n_{j-1}+1}{j}+\dots+\binom{n_k+1}{k+1},\quad 0^{\langle j\rangle}\stackrel{\mathrm{def}}{=}0.$$

Теорема 3.17 (Теорема Маколея [33, Th.2.2, Th.2.3])**.** *Пусть $a_0,a_1,a_2,\dots$ — последовательность целых чисел. Тогда следующие два условия эквивалентны*

1. *$a_0 = 1$ и $0 \leqslant a_{j+1} \leqslant a_j^{\langle j\rangle}$, $j \geqslant 1$;*

2. *существует связная коммутативная градуированная алгебра $A^* = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j$, порожденная своей линейной частью A^1, такая что $\dim A^j = a_j$.*

Последовательности чисел, удовлетворяющие любому из этих условий, называются М-последовательностями (в честь Маколея).

Из следствия 3.12 получаем,

Предложение 3.18. *h-вектор комплекса Коэна–Маколея (в частности, гомологической сферы) является М-последовательностью.*

3.5 Горенштейновость

Нам потребуются следующие технические определения

Определение 3.19. Пусть $A = \bigoplus_{j=0}^{d} A_j$ — нульмерная коммутативная (или градуированно коммутативная) алгебра. Тогда A называется алгеброй Пуанкаре формальной размерности d, если $A_d \cong \Bbbk$ и билинейная форма спаривания $\times\colon A_j \times A_{d-j} \to A_d \cong \Bbbk$ невырожденна при всех $j = 0, \ldots, d$.

Замечание 3.20. Основной пример алгебр Пуанкаре — алгебры когомологий связных замкнутых ориентируемых многообразий.

Определение 3.21. Пусть M — фактор-алгебра алгебры $\Bbbk[m]$ и M — алгебра Коэна–Маколея. Алгебра M называется горенштейновой, если $M/\theta M$ — алгебра Пуанкаре для какой-то (эквивалентно: для любой) системы параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$.[3]

Определение 3.22. Симплициальный комплекс K называется горенштейновым (над $\Bbbk$), если $K = \Delta_{[s]} * L$, где $\Delta_{[s]}$ — симплекс на $s \geqslant 0$ вершинах, а L — гомологическая сфера (над $\Bbbk$).

Иными словами, горенштейновы комплексы — это гомологические сферы и итерированные конусы над ними.

Теорема 3.23 (Теорема Стенли)**.** *Алгебра $\Bbbk[K]$ является алгеброй Горенштейна тогда и только тогда, когда K — горенштейнов комплекс (над $\Bbbk$).*

Определение (Предложение **??**) гласит, что фактор горенштейновой алгебры по системе параметров является алгеброй Пуанкаре. В связи с этим можно сформулировать удобное уточнение предыдущей теоремы

Теорема 3.24. *Пусть $\dim K = n - 1$. Алгебра $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ является алгеброй Пуанкаре формальной размерности $2d$ в том и только том случае, когда $K = \Delta_{[n-d]} * L$, где L — $(d-1)$-мерная гомологическая сфера.*

[3]Подробности и инвариантное определение см. в Приложении **??**

Следствие 3.25. *Пусть* $\dim K = n - 1$. *Алгебра* $\Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *является алгеброй Пуанкаре формальной размерности* $2n$ *в том и только том случае, когда* K *— гомологическая сфера.*

Из невырожденности спаривания в алгебре Пуанкаре получаем, что

$$\dim \Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{2j} = \dim \Bbbk[K]/(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{2(n-j)}.$$

Отсюда следует $h_j = h_{n-j}$. Это есть соотношения Дена–Соммервилля для сфер, доказанные ранее другим методом.

3.6 g-теорема

Из соотношений Дена–Соммервилля следует, что вся информация об f-векторе гомологической сферы содержится в массиве $h_0, h_1, \ldots, h_{[n/2]}$. Пусть $g_0 = 1$ и $g_j = h_j - h_{j-1}$ при $j = 1, \ldots, [n/2]$. Последовательность $(g_0, g_1, \ldots, g_{[n/2]})$ называется g-вектором гомологической сферы. f-вектор можно восстановить по g-вектору.

Следующая теорема является, пожалуй, самым известным и мощным результатом алгебраической комбинаторики.

Теорема 3.26 (g-теорема). *Набор чисел* $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ *является* h*-вектором выпуклой симплициальной сферы размерности* $n-1$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. $h_j = h_{n-j}$ *(соотношения Дена–Соммервилля);*
2. $h_j \geqslant 0$*;*
3. *g-вектор* $(g_0, g_1, \ldots, g_{[n/2]})$ *является M-последовательностью, иными словами,* $g_0 = 1$ *и* $0 \leqslant g_{j+1} \leqslant g_j^{\langle j \rangle}$ *при* $j = 0, \ldots, [n/2] - 1$.

В частности, для выпуклых сфер распределение h-чисел унимодально, т.е. до середины они нестрого возрастают, а потом (из соображений симметрии) нестрого убывают:

$$1 = h_0 \leqslant h_1 \leqslant \cdots \leqslant h_{[n/2]} = h_{n-[n/2]} \geqslant \cdots \geqslant h_{n-1} \geqslant h_n = 1.$$

Достаточность в g-теореме доказали Биллера и Ли, явно построив симплициальные многогранник, имеющий заданный g-вектор [7]. Необходимость примерно в то же время доказал Стенли [35]. Мы приведем ключевую идею его конструкции.

Определение 3.27. Пусть $A^* = \bigoplus_{j=0}^{n} A^{2j}$ — алгебра Пуанкаре формальной размерности $2n$. Элемент $\omega \in A^2$ называется элементом Лефшеца, если гомоморфизм

$$\times\omega^{n-2j} \colon A^{2j} \to A^{2n-2j}$$

является изоморфизмом при всех $j < n/2$.

Далее ω обозначает элемент Лефшеца. Гомоморфизм $\times\omega^{n-2j}$ из определения представляется в виде последовательности операторов

$$A^{2j} \xrightarrow{\times\omega} A^{2j+2} \xrightarrow{\times\omega} \dots \xrightarrow{\times\omega} A^{2n-2j-2} \xrightarrow{\times\omega} A^{2n-2j}.$$

Значит, для элемента Лефшеца ω гомоморфизм $A^{2j} \xrightarrow{\times\omega} A^{2j+2}$ инъективен при $j < n/2$. Рассмотрим фактор-алгебру $B^* = A^*/(\omega)$. Из сказанного выше легко следует, что $\dim B^0 = 1$ и $\dim B^{2j} = \dim A^{2j} - \dim A^{2j-2}$ при $j \leqslant n/2$. Кроме того, если алгебра A^* порождена своей компонентой степени 2, то то же самое верно и для алгебры B^*. Получаем

Предложение 3.28. *Пусть алгебра Пуанкаре A^* формальной размерности $2n$ порождена своей компонентой A^2. Обозначим $\dim A^{2j}$ через d_j. Тогда $d_j = d_{n-j}$ и*

$$1 = d_0 \leqslant d_1 \leqslant \dots \leqslant d_{[n/2]} = d_{n-[n/2]} \geqslant \dots \geqslant d_{n-1} \geqslant d_n = 1.$$

Кроме того, последовательность $1, d_1 - d_0, d_2 - d_1, \dots, d_{[n/2]} - d_{[n/2]-1}$ является M-последовательностью.

Значит, чтобы доказать, что для выпуклой сферы K выполнены условия (1)-(3) g-теоремы, достаточно доказать, что в алгебре Пуанкаре $\Bbbk[K]/(\theta_1, \dots, \theta_n)$ существует элемент Лефшеца. Это и доказал Стенли. Сформулируем более точное утверждение.

Пусть P — простой многогранник (какой-нибудь), двойственный к выпуклой сфере K. Для любого $i \in [m]$ фиксируем (какую-нибудь) внешнюю нормаль $\lambda(i) \in \mathbb{R}^n$ к гиперграни $F_i \subset P$. Тогда многогранник P задается в виде

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle\lambda(i), x\rangle \leqslant c_i\}.$$

Числа $c_i \in \mathbb{R}$ называются опорными числами многогранника P. Заметим, что выбор нормали для каждой гиперграни задает отображение $\lambda\colon [m] \to \mathbb{R}^n$, являющееся правильной векторной раскраской для симплициального комплекса K (действительно, если $\{i_1, \dots, i_s\} \in K$, то соответствующие гиперграни $F_{i_1}, \dots, F_{i_s}$ пересекаются трансверсально, и их нормали линейно независимы). Значит, в $\mathbb{R}[K]$ можно выделить систему параметров $\theta_1, \dots, \theta_n$, соответствующую этой раскраске (см. Предложение 3.5).

Теорема 3.29. *Пусть K — выпуклая симплициальная сфера, $(\theta_1, \dots, \theta_n) \subset \mathbb{R}[K]$ — линейная система параметров, а $c_1, \dots, c_m$ — опорные числа, определенные выше. Тогда элемент $c_1v_1 + \dots + c_mv_m$ является элементом Лефшеца в алгебре $\mathbb{R}[K]/(\theta_1, \dots, \theta_n)$.*

Замечание 3.30. В изначальном подходе, предложенном Ричардом Стенли, требуется, чтобы двойственный простой многогранник P был целочисленным (т.е. все его вершины имеют целые координаты), а функция $\lambda\colon [m] \to \mathbb{R}^n$ сопоставляла каждой гиперграни ее примитивную нормаль (т.е. целочисленный вектор, координаты которого взаимно просты в совокупности). Эти условия не являются сильным ограничением, т.к. любой простой многогранник можно вначале немного пошевелить, чтобы он стал рациональным, а потом гомотетировать, чтобы он стал целочисленным. При описанных условиях простому многограннику P можно сопоставить проективное торическое многообразие X_P, являющееся орбифолдом. Алгебру $\mathbb{R}[K]/(\theta_1,\dots,\theta_n)$ можно отождествить с алгеброй когомологий многообразия X_P, а существование элемента Лефшеца в этой алгебре следует из сильной теоремы Лефшеца, известной в алгебраической геометрии.

В настоящее время известны несколько доказательств, не использующих (во всяком случае, в явном виде) теорему Лефшеца, см. [9], [38]. В геометрических доказательствах целочисленность многогранника уже не требуется, поэтому мы сформулировали теорему 3.29 в наиболее общем и естественном виде. В курсе мы эту теорему доказывать не будем.

Теперь сформулируем основную открытую гипотезу в комбинаторной теории симплициальных комплексов.

Гипотеза 3.31 (g-гипотеза)**.** *h-вектор гомологической сферы удовлетворяет условиям (1)-(3) g-теоремы.*

Иными словами, если рассматривать класс гомологических сфер вместо выпуклых, то никаких новых h-векторов мы не получим. Эта гипотеза оказалась крепким орешком: она проверена для большого класса сфер, но никаких достаточно общих результатов по ней не получено. Гипотеза открыта даже для более узкого класса топологических сфер (и даже для PL-сфер).

Упражнение 3.32. Допустим, что в алгебре Пуанкаре A^* есть элемент Лефшеца. Тогда почти любой элемент A^2 является элементом Лефшеца. Здесь “почти любой” означает — любой вне алгебраического подмножества положительной коразмерности.

Упражнение 3.33. Пусть K — гомологическая сфера и в алгебре $\Bbbk[K]/(\theta_1,\dots,\theta_n)$ есть элемент Лефшеца. Тогда для почти любой линейной системы параметров $(\theta'_1,\dots,\theta'_n)\subset \Bbbk[K]_2$ в алгебре $\Bbbk[K]/(\theta'_1,\dots,\theta'_n)$ есть элемент Лефшеца.

4 Тор-алгебра симплициального комплекса

4.1 Формула Хохстера

Алгебра Стенли–Райснера $\Bbbk[K]$ является модулем над алгеброй $\Bbbk[m]$. Основное поле $\Bbbk$ тоже является алгеброй и модулем над $\Bbbk[m]$. Значит (см. Приложение B), $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)=\bigoplus_{i,j}\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ является биградуированной алгеброй. Будем вкратце называть ее Тор-алгеброй симплициального комплекса. Ближайшая цель: описать ее структуру.

Введем дополнительную градуировку в алгебрах $\Bbbk[m]$ и $\Bbbk[K]$: положим $\operatorname{bideg} v_i=(2,0)$. Рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda[m]=\Lambda_{\Bbbk}[u_1,\dots,u_m]$, в которой биградуировка задана правилом $\operatorname{bideg} u_i=(2,-1)$.

Теорема 4.1. *1. (Бухштабер–Панов) Имеют место изоморфизмы алгебр*

$$\operatorname{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk) \cong H^*(\Bbbk[K]\otimes\Lambda[m],d) \cong H^*\left(\frac{\Bbbk[K]\otimes\Lambda[m]}{(u_iv_i=v_i^2=0)},d\right),$$

где дифференциал d имеет бистепень $(0,-1)$, определен на образующих правилом $du_i=v_i$, $dv_i=0$ и удовлетворяет формуле Лейбница.

2. (Хохстер) При всех i,j имеют место аддитивные изоморфизмы

$$\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk) \cong \bigoplus_{J\subseteq[m],|J|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J;\Bbbk).$$

3. (Баскаков) Умножение в Тор-алгебре задается следующим образом: произведение элементов $a\in\widetilde{H}^{j-i-1}(K_J;\Bbbk)\subset\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ и $a'\in\widetilde{H}^{j'-i'-1}(K_{J'};\Bbbk)\subset\operatorname{Tor}^{-i',2j'}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ равно нулю, если $J\cap J'\neq\varnothing$; в противном случае оно дается композицией

$$\widetilde{H}^{j-i-1}(K_J;\Bbbk)\otimes\widetilde{H}^{j'-i'-1}(K_{J'};\Bbbk)\to\widetilde{H}^{(j+j')-(i+i')-1}(K_J*K_{J'};\Bbbk)\to\widetilde{H}^{(j+j')-(i+i')-1}(K_{J\sqcup J'};\Bbbk),$$

где первый гомоморфизм есть отображение Кюннета в когомологиях джойна, а второй гомоморфизм индуцирован естественным включением $K_{J\sqcup J'}\hookrightarrow K_J*K_{J'}$.

Доказательство. (1) Из общих соображений (см. Предложение B.6) следует, что $\operatorname{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)\cong H^*(R(K),d)$, где $R(K)=\Bbbk[K]\otimes\Lambda[m]$. Обозначим $R^*(K)=\dfrac{\Bbbk[K]\otimes\Lambda[m]}{(u_iv_i=v_i^2=0)}$. Обе алгебры $R(K)$ и $R^*(K)$ являются биградуированными дифференциальными алгебрами, и имеет место естественный эпиморфизм $\varrho\colon R(K)\to R^*(K)$. Алгебра $R^*(K)$ является конечномерным векторным пространством с базисом $u_Jv_I=\bigwedge_{j\in J}u_j\prod_{i\in I}v_i$, где $I\in K$, $J\subseteq[m]$, $I\cap J=\varnothing$. Рассмотрим вложение градуированных векторных пространств $\imath\colon R^*(K)\to R(K)$, которое посылает моном u_Jv_i в одноименной моном алгебры $R(K)$ (это отображение ни в коем случае не гомоморфизм алгебр!).

Лемма 4.2. *Гомоморфизм $\varrho\colon R(K)\to R^*(K)$ индуцирует изоморфизм в когомологиях алгебр.*

Доказательство. Можно явно алгебраически построить коцепную гомотопию между $\imath\circ\varrho\colon R(K)\to R(K)$ и $\mathrm{id}\colon R(K)\to R(K)$ (см.[14, Lem.3.2.6]), но мы поступим подругому.

Определение 4.3 (Полиэдральная степень)**.** Пусть $A\subset X$ — пара CW-комплексов, а K — симплициальный комплекс на $[m]$. Для $I\subset[m]$ рассмотрим $U_I=\prod_{i=1}^m Y_i\subseteq X^m$, где $Y_i=\begin{cases}X, & \text{если } i\in I,\\ A, & \text{если } i\notin I\end{cases}$. Пространство $\mathcal{Z}_K(X,A)\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{I\in K}U_I\subset X^m$ называется полиэдральной степенью (или K-степенью) пары (X,A).

Пространство $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$ называется момент-угол комплексом симплициального комплекса K.

На паре (D^2, S^1) можно ввести естественную клеточную структуру, имеющую одну нульмерную, одну одномерную и одну двумерную клетки, которые мы обозначаем $1, T, D$ соответственно. Эта структура индуцирует клеточную структуру на $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$, в которой клетки имеют вид $D^I \times T^J \times 1^{[m]\setminus(I\sqcup J)}$, где $I \in K$, $J \subset [m]$, $I \cap J = \varnothing$. Заметим, что $\partial D = T$, $\partial T = 0$. Отсюда несложно вывести, что модуль клеточных коцепей пространства $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ совпадает с $R^*(K)$.

Теперь рассмотрим пространство $\mathcal{Z}_K(S^\infty, S^1)$. Снабдим S^∞ клеточной структурой, с одной клеткой в каждой размерности, а именно скажем, что $S^\infty = \lim S^{2k+1}$, где $S^{2k+1} = (S^{2k-1} \cup_f D^{2k}) \cup_g D^{2k+1}$, где $f\colon \partial D^{2k} \to S^{2k-1}$ тождественно (степени 1), а $g\colon \partial D^{2k+1} \to D^{2k}$ — проекция на экваториальную плоскость (степени 0). Такая клеточная структура на паре (S^∞, S^1) индуцирует клеточную структуру на $\mathcal{Z}_K(S^\infty, S^1)$. Модуль клеточных коцепей этой структуры совпадает с R_K. Отображение вложения $D^2 \to S^\infty$ является клеточным и индуцирует гомоморфизм $\varrho\colon R_K \to R_K^*$.

Заметим теперь, что пара (D^2, S^1) является относительным гомотопическим ретрактом пары (S^∞, S^1) (пространство S^∞ стягиваемо), а значит $\mathcal{Z}_K(S^\infty, S^1) \simeq \mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ (это нужно строго доказывать, см.[14, Prop.4.2.3], но поверить в это не сложно). Значит ϱ индуцирует изоморфизм в когомологиях.[4] $\square$

(2) Фиксируем $J \subseteq [m]$. Рассмотрим подпространство $R_K^*(J)$ пространства R_K^*, порожденное мономами вида $u^{J\setminus I}v^I$ при $I \subset J$. Заметим, что

$$du^{J\setminus I}v^I = \sum_{i\in I} \pm u^{J\setminus I\sqcup\{i\}}v^{I\setminus i}.$$

Поэтому $R_K^*(J)$ инвариантно относительно дифференциала и следовательно

$$\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-i,2j}(\Bbbk[K], \Bbbk) = H^{-i,2j}(R_K^*, d) \cong \bigoplus_{J\subseteq[m],|J|=j} H^{-i,2j}(R_K^*(J), d).$$

Элемент $u^{J\setminus I}v^I \in R_K^*(J)$ имеет полную градуировку $(2|J|, -|J| + |I|)$.

Рассмотрим модуль клеточных коцепей $\mathcal{C}^j(K_J; \Bbbk)$ полного подкомплекса K_J. Пусть ω_I — коцепь принимающая значение 1 на симплексе I и 0 на всех остальных. Построим линейный гомоморфизм $A_J\colon R_K^*(J) \to \mathcal{C}^*(K_J; \Bbbk)$, посылающий $u^{J\setminus I}v^I$ в ω_I. Видно[5], что $A_J(du^{J\setminus I}v^I) = \delta A(u^{J\setminus I}v^I)$. Поэтому A_J устанавливает изоморфизм дифференциальных комплексов, а значит и их колец когомологий. A_J переводит элемент $u^{J\setminus I}v^I$ степени $|J| + |I|$ в элемент ω_I степени $|I| - 1$, то есть понижает степень на $|J| + 1$. Значит $H^{-i,2|J|}(R_K^*(J), d) \cong H^{|J|-i-1}(K_J; \Bbbk)$. В конечном итоге,

$$\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-i,2j}(\Bbbk[K], \Bbbk) \cong \bigoplus_{J\subseteq[m],|J|=j} H^{j-i-1}(K_J; \Bbbk).$$

(3) Для доказательства формулы Баскакова, надо рассмотреть произведение мономов $u^{J_1\setminus I_1}v^{I_1}\ u^{J_2\setminus I_2}v^{I_2}$ и посмотреть куда эти мономы переходят при изоморфизмах $A_J\colon R_K^*(J) \to \mathcal{C}^*(K_J; \Bbbk)$, описанных в предыдущем пункте. $\square$

[4] На самом деле, верно более сильно сильное утверждение: $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbb{Z})$ и $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathbb{Z}[m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z})$ изоморфны как кольца.

[5] тут мы относимся к знакам с традиционной небрежностью

Ранги $\beta^{-i,2j} = \dim_{\Bbbk} \operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$ называются биградуированными числами Бетти алгебры $\Bbbk[K]$ (или симплициального комплекса K, хотя тут может возникнуть путаница с обычными топологическими числами Бетти).

Оказывается, биградуированные числа Бетти содержат огромное количество информации о комбинаторике, топологии и алгебре K, как показывают следующие утверждения.

Утверждение 4.4. $\beta^{-i,2m} = \beta_{2m-i-1}(K)$

Доказательство. Формула Хохстера в чистом виде. □

Утверждение 4.5. *Пусть* $n = \dim K + 1$.

$$\sum_{i,j} (-1)^i \beta^{-i,2j} t^{2j} = \frac{h_0 + h_1 t^2 + \cdots + h_n t^{2n}}{(1-t^2)^{m-n}}$$

Доказательство. Пусть $R^\bullet \to \Bbbk[K]$ — минимальная резольвента. Стандартный аргумент с эйлеровой характеристикой показывает, что

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Hilb}(R^{-i}; t) = \operatorname{Hilb}(\Bbbk[K]; t) = \frac{h_0 + \ldots + h_n t^{2n}}{(1-t^2)^n}. \tag{4.1}$$

Поскольку R^{-i} — свободный модуль, имеющий $\beta^{-i,2j}$ порождающих степени $2j$, имеем

$$\operatorname{Hilb}(R^{-i}; t) = \sum_j \frac{\beta^{-i,2j} t^{2j}}{(1-t^2)^m}. \tag{4.2}$$

Подставив (4.2) в (4.1), получим требуемое. □

Утверждение 4.6. $\operatorname{pdim} \Bbbk[K] = \max\{i \mid \sum_j \beta^{-i,2j} \neq 0\}$.

Доказательство. Проективная размерность есть длина минимальной резольвенты, а $\sum_j \beta^{-i,2j}$ есть ранг i-го члена минимальной резольвенты. □

4.2 Двойственность Александера в гомологических сферах

Теорема Аврамова–Голода

Теорема 4.7 (Теорема Аврамова–Голода)**.** *M — горенштейнова алгебра тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tor}^{*,*}_A(M, \Bbbk)$ — алгебра Пуанкаре.*

Вместе с теоремой Стенли (Теорема 3.23) это дает

Следствие 4.8. *K — горенштейнов комплекс тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$ — алгебра с двойственностью Пуанкаре.*

В частности, если K — гомологическая сфера, то $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ — алгебра с двойственностью Пуанкаре. Это утверждение можно уточнить

Предложение 4.9. *Пусть K — гомологическая сфера размерности $n-1$ на m вершинах. Тогда $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ является биградуированной алгеброй с биградуированной двойственностью Пуанкаре, причем ее старший (фундаментальный) класс имеет биградуировку $(2m,-(m-n))$.*

Топологически это следует из того факта, что для гомологической сферы K пространство $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$ является гомологическим многообразием, а значит его когомологии — алгебра Пуанкаре.

Также это хорошо согласуется со следующим утверждением

Теорема 4.10 (Двойственность Александера)**.** *Пусть K — гомологическая сфера размерности n на m вершинах. Пусть $J\subset[m]$. Тогда $\widetilde{H}^{i-1}(K_J)\cong\widetilde{H}_{n-i-1}(K_{[m]\setminus J})$.*

4.3 Топологическое доказательство теоремы Райснера

Мы докажем теорему Райснера не совсем каноничным способом: используя формулу Хохстера и несложные топологические соображения. Стандартное доказательство использует локальные когомологии модулей — оно более прямолинейное, но требует большей подготовки. Его приведем позже.

Введем несколько технических определений. Для простоты мы будем обозначать $\widehat{J}=[m]\backslash J$ для $J\subseteq[m]$.

Пусть s — неотрицательное целое число. Симплициальный комплекс K называется s-линк-ацикличным (вкратце, s-LA) над $\Bbbk$, если $\widetilde{H}^i(\mathrm{link}_K I;\Bbbk)=0$ для всех симплексов $I\in K$ и $i<s-|I|$. В частности, это означает, что $\widetilde{H}^i(K;\Bbbk)=0$ при $i<s$, поскольку $\mathrm{link}_K\varnothing=K$.

Симплициальный комплекс K называется s-подкомплекс-ацикличным (вкратце, s-SCA) над $\Bbbk$, если $\widetilde{H}^i(K_{\widehat{J}};\Bbbk)=0$ для всех подмножеств $J\in K$ и $i<s-|J|$. Это условие опять же влечет ацикличность самого K: $\widetilde{H}^i(K;\Bbbk)=0$ при $i<s$.

Следующее утверждение может показаться неожиданным

Предложение 4.11. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *K является s-линк-ацикличным комплексом над $\Bbbk$;*
2. *K является s-подкомплекс-ацикличным комплексом над $\Bbbk$;*
3. $\mathrm{depth}\,\Bbbk[K]\geqslant s+1$.

Прежде чем мы докажем это предложение, поймем, что из него следует теорема Райснера. Действительно, пусть K — чистый комплекс размерности $n-1$. По определению, K является комплексом Коэна–Маколея в том и только том случае, когда K

— $(n-1)$-линк-ацикличен. С другой стороны алгебра $\Bbbk[K]$ является алгеброй Коэна–Маколея в том и только том случае, когда $\operatorname{depth}\Bbbk[K] = \dim\Bbbk[K] = n$, что эквивалентно неравенству $\operatorname{depth}\Bbbk[K] \geqslant n$ (поскольку неравенство $\operatorname{depth}\Bbbk[K] \leqslant \dim\Bbbk[K]$ выполнено всегда). Значит Предложение 4.11 при $s = n-1$ это и есть в точности теорема Райснера.

Доказательство. Пусть m — число вершин K.

Эквивалентность (2) и (3). Это следует из формулы Хохстера и теоремы Ауслендера–Буксбаума. Удобно визуализировать:

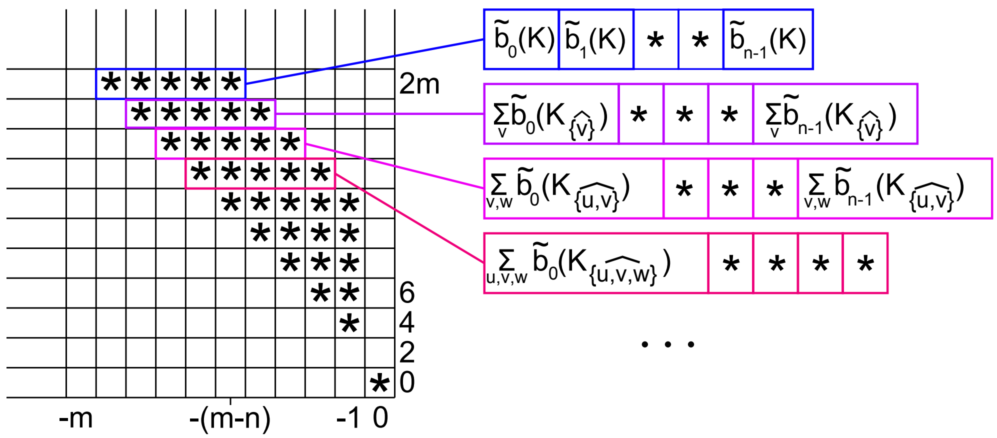

Рис. 1: Вид формулы Хохстера

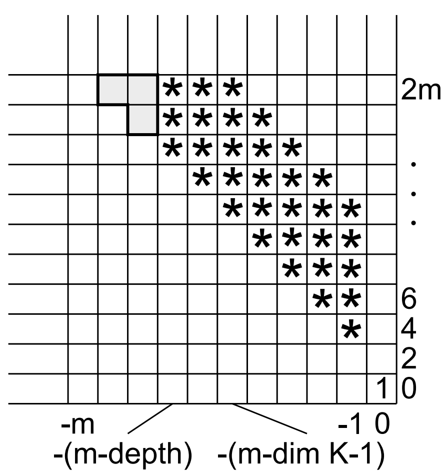

Рис. 2: Глубина и обнуление биградуированных чисел Бетти

Действительно, согласно теореме Ауслендера–Буксбаума (Теорема B.15) условие $\operatorname{depth}\Bbbk[K] \geqslant s+1$ эквивалентно условию $\operatorname{pdim}\Bbbk[K] \leqslant m-s-1$. Последнее эквивалентно условию $\operatorname{Tor}^{-i}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk) = 0$ при $i \geqslant m-s$ согласно определению минимальной резольвенты. Последнее эквивалентно условию

$$\widetilde{H}^{|J'|-i-1}(K_{J'};\Bbbk)=0,\ \text{при всех } J' \text{ и } i\geqslant m-s,$$

по формуле Хохстера. Заменяя $J=[m]\backslash J'$, получаем

$$\widetilde{H}^{m-|J|-i-1}(K_{\hat{J}};\Bbbk)=0,\ \text{при } i\geqslant m-s.$$

Делая замену индекса $p=m-|J|-i-1$, получаем $\widetilde{H}^{p}(K_{\hat{J}};\Bbbk)=0$ при $p\leqslant m-|J|-m+s-1=s-1-|J|$. Обнуление когомологий и гомологий эквивалентно, поскольку мы работаем над полем $\Bbbk$.

Эквивалентность (1) и (2). Оба условия топологические, и доказывать мы их будем топологически. Введем следующий формализм. Пусть V — конечное множество и L — симплициальный комплекс на подмножестве множества V (возможно, на всем V). Пусть Ω обозначает множество всех таких комплексов. Для каждой вершины $i\in V$ определим два оператора, p_i и q_i, действующие на Ω. Положим $p_iL=\operatorname{link}_L i$, если i — вершина L; иначе положим $p_iL=L$. Аналогично, положим $q_iL=L_{\hat{i}}$, если i — вершина L; и $q_iL=L$ иначе. Заметим, что все линки и полные подкомплексы заданного комплекса K можно получать итерованным применением операторов p_* и q_* к K. Действительно, если $I=\{i_1,\ldots,i_k\}\in K$, то $\operatorname{link}_K I=p_{i_k}\ldots p_{i_1}K$; и если $J=\{i_1,\ldots,i_k\}\subset V$, то $K_{\hat{J}}=q_{i_k}\ldots q_{i_1}K$. Во введенных терминах нам требуется доказать эквивалентность следующих условий

(1) Комплекс $q_{i_k}\ldots q_{i_1}K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq[m]$;

(2) $p_{i_k}\ldots p_{i_1}K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1,\ldots,i_k\}\in K$.

Здесь t-ацикличность означает обнуление групп приведенных (ко)гомологий в размерностях вплоть до t. В действительности, можно заменить условие (2) на эквивалентное, но более удобное условие:

(2') $p_{i_k}\ldots p_{i_1}K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq[m]$.

Заметьте, что $\operatorname{link} I$ не определен для $I\notin K$, однако выражение $p_{i_k}\ldots p_{i_1}K$ имеет смысл для произвольных подмножеств множества V. Эквивалентность (2) и (2') легко понять из следующего соображения. Очевидно, что (2') влечет (2). Докажем обратное. Рассмотрим произвольное выражение $p_{i_k}\ldots p_{i_1}K$. Если i_j является вершиной $p_{i_{j-1}}\ldots p_{i_1}K$ для всех j, то $\{i_1,\ldots,i_k\}\in K$, и доказывать нечего. Иначе, вершина v_j не является вершиной $p_{i_{j-1}}\ldots p_{i_1}K$ для некоторого j. Тогда $p_{i_j}p_{i_{j-1}}\ldots p_{i_1}K=p_{i_{j-1}}\ldots p_{i_1}K$, поэтому можно убрать букву p_{i_j} из выражения. Убрав все неправильные буквы одну за другой, получим, что $p_{i_k}\ldots p_{i_1}K=\operatorname{link}_K I'$, где $I'\subset\{i_1,\ldots,i_k\}$. Значит, $p_{i_k}\ldots p_{i_1}K=\operatorname{link}_K I'$ является $(s-|I'|-1)$-ацикличным, что есть более сильное условие, нежели $(s-k-1)$-ацикличность.

Будем доказывать эквивалентность (1) и (2') индукцией по числу k букв p_* и q_* в выражениях. Более точно, докажем эквивалентность следующих трех условий:

(1_N) $q_{i_k}\ldots q_{i_1}K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq[m]$, $k\leqslant N$;

(2_N) $p_{i_k}\ldots p_{i_1}K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq[m]$, $k\leqslant N$;

$(*_N)$ $r_{i_k}\ldots r_{i_1}K$ является $(s-k-1)$-ацикличным для всех $\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq[m]$, $k\leqslant N$, где r_{i_j} — это либо p_{i_j}, либо q_{i_j} (смешанное условие).

Следующая лемма доказывает базу индукции и является ключевым моментом для шага.

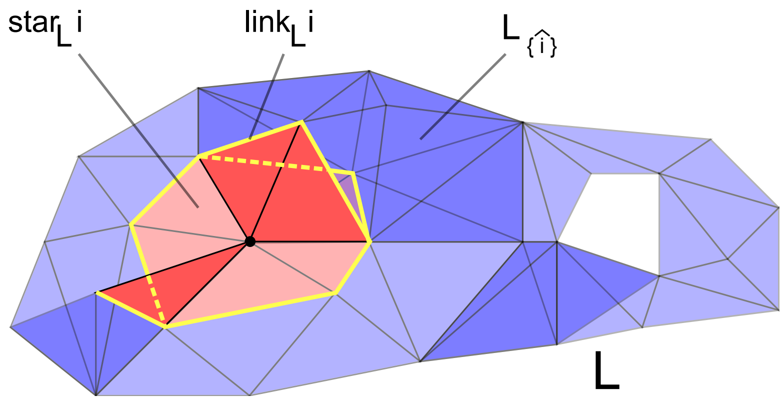

Рис. 3: Связь линка, звезды и полного подкомплекса

Лемма 4.12. *Пусть $L \in \Omega$ и $i \in [m]$. Допустим, что L является t-ацикличным. Тогда p_iL является $(t-1)$-ацикличным тогда и только тогда, когда q_iL является $(t-1)$-ацикличным. Иными словами, $(1_1) \Leftrightarrow (2_1) \Leftrightarrow (*_1)$.*

Доказательство. Если i не является вершиной L, то $p_iL = q_iL = L$, и доказывать нечего. Положим теперь, что i — вершина L. Рассмотрим два подкомплекса: $L_{\hat{i}}$ и $\mathrm{star}_L\{i\}$. Имеем $L_{\hat{i}} \cup \mathrm{star}_L\{i\} = L$ и $L_{\hat{i}} \cap \mathrm{star}_L\{i\} = \mathrm{link}_L\{i\}$ (см.рис.3). Точная последовательность Майера–Вьеториса для этих подмножеств имеет вид

$$\ldots \leftarrow \widetilde{H}^{j+1}(L) \leftarrow \widetilde{H}^{j}(p_iL) \leftarrow \widetilde{H}^{j}(q_iL) \leftarrow \widetilde{H}^{j}(L) \leftarrow \ldots$$

поскольку $\mathrm{star}_L\{i\}$ стягиваема. При $j \leqslant t-1$, когомологии $\widetilde{H}^{j+1}(L)$ и $\widetilde{H}^{j}(L)$ зануляются, поэтому $\widetilde{H}^{j}(p_iL) \cong \widetilde{H}^{j}(q_iL)$. Следовательно, последние группы зануляются одновременно. $\square$

Докажем, что $(1_N) \Leftrightarrow (2_N) \Leftrightarrow (*_N)$ для произвольного N. Очевидно, что $(*_N) \Rightarrow (1_N), (2_N)$. Мы докажем, что $(1_N) \Rightarrow (*_N)$ индукцией по N.

По индуктивному предположению, $(1_{N-1}) \Leftrightarrow (*_{N-1}) \Leftrightarrow (2_{N-1})$. Докажем импликацию $(1_N) \Rightarrow (*_N)$. По (1_N)-условию, $q_{i_N}q_{i_{N-1}}\ldots q_{i_1}K$ является $(s-N-1)$-ацикличным. Применяя Лемму 4.12 к $q_{i_{N-1}}\ldots q_{i_1}K$, получаем, что комплекс $p_{i_N}q_{i_{N-1}}\ldots q_{i_1}K$ также является $(s-N-1)$-ацикличным. Это соображение позволяет заменить самую левую букву q в выражении на букву p с тем же индексом. Если бы мы могли сделать то же самое с буквами q во всех позициях, предложение было бы доказано.

Чтобы так сделать, воспользуемся тем, что операторы p_* и q_* коммутируют в большинстве интересных ситуаций. Действительно, пусть i_1, i_2 — две вершины, и r_* — это p_* или q_*. Легко проверить, что $r_{i_1}r_{i_2}L$ либо совпадает с $r_{i_2}r_{i_1}L$, либо сокращается до более короткого выражения.

Значит, для произвольного выражения $r_{i_N}r_{i_{N-1}}\dots r_{i_1}K$ мы можем прокоммутировать буквы так чтобы p_{i_j} уехало в самую левую позицию. Если нам это удалось, заменим эту букву на q с тем же индексом. За конечное число шагов мы получим слово состоящее только из букв q, которое по предположению $(s-N-1)$-ациклично. Применяя Лемму 4.12 обратным ходом, мы докажем, что $r_{i_N}r_{i_{N-1}}\dots r_{i_1}K$ является $(s-N-1)$-ацикличным.

Если же коммутирование на каком-то шаге не удалось, значит длина слова сократилась. В этом случае $(s-N-1)$-ацикличность выполнена по индуктивному предположению.

Те же самые рассуждения доказывают импликацию $(2_N) \Rightarrow (*_N)$. □

Замечание 4.13. В доказательстве мы индуктивно использовали точную последовательность Майера–Вьеториса. Весь аргумент, однако, можно свернуть в одну спектральную последовательность (спектральную последовательность Зимана в интерпретации МакКрори, либо спектральную последовательность Майера–Вьеториса). Это сделано в работе [27].

Следствие 4.14. *Пусть $X = |K|$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $H_j(X;\Bbbk) = H_j(X, X\backslash x;\Bbbk) = 0$ *при* $j < s$*;*
2. $\operatorname{depth}\Bbbk[K] \geqslant s+1$.

Доказательство. Пункт 1 эквивалентен условию s-LA согласно Лемме 1.28. □

Следствие 4.15. *Если $|K_1| \cong |K_2|$, то* $\operatorname{depth}\Bbbk[K_1] = \operatorname{depth}\Bbbk[K_2]$. *Иными словами, глубина кольца Стенли–Райснера является топологическим инвариантом.*

Следствие 4.16. *Пусть K — комплекс Коэна–Маколея размерности $n-1$. Тогда граф $K^{(1)}$ является $(n-1)$-связным (то есть не теряет связность при выкидывании любых $n-2$ вершин).*

Доказательство. Пусть $J \subset [m]$, $|J| = n-2$. Связность $K^{(1)}_{\hat{J}}$ эквивалентна связности комплекса $K_{\hat{J}}$, которая эквивалентна обнулению нулевых приведенных гомологий. Но $H^0(K_{\hat{J}}) = 0$ для комплекса Коэна–Маколея, согласно Предложению 4.11. □

4.4 Усиления Коэн–Маколеевости

Известно, что алгебра A над $\Bbbk[m]$ является алгеброй Горенштейна тогда и только тогда, когда последний модуль ее минимальной резольвенты имеет ранг 1. Полагая $\dim K = n-1$, имеем: $\Bbbk[K]$ — горенштейнова алгебра тогда и только тогда, когда $\beta^{-(m-n)} = 1$. Используя это соображение, формулу Хохстера и рассуждения, аналогичные предыдущему пункту, можно доказать теорему Стенли о горенштейновости (Теорему 3.23). Более того, из теоремы Аврамова–Голода (Теорема 4.7) следует, что биградурованные числа Бетти гомологических сфер симметричны. Распределение биградуированных чисел Бетти гомологических сфер выглядит следующим образом:

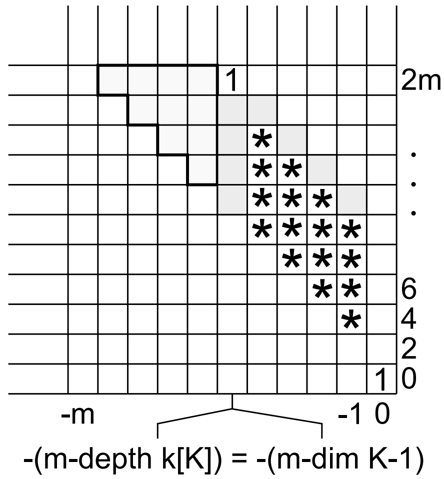

Рис. 4: Числа Бетти сферы

Определение 4.17. Симплициальный комплекс K размерности $n-1$ называется s-Коэн–Маколеевским (s-CM), если $K_{\hat{J}}$ является комплексом Коэна–Маколея размерности $n-1$ при $|J| \leqslant s-1$.

Условие 1-CM — это просто Коэн–Маколеевость. Условие s-CM, очевидно, влечет k-CM при $k < s$. Согласно формуле Хохстера, биградуированные числа Бетти k-CM комплекса имеют вид, показанный на рисунке 5.

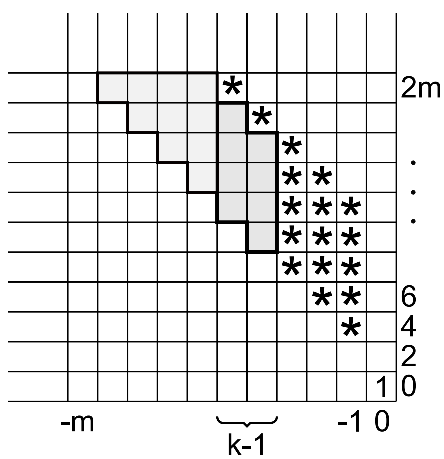

Рис. 5: Числа Бетти k-CM комплексов

Порядок связности одномерного остова k-CM комплекса выше чем у просто CM-комплекса

Предложение 4.18. *Пусть K — k-СМ комплекс размерности $n-1$. Тогда граф $K^{(1)}$ является $(n+k-2)$-связным (то есть не теряет связность при выкидывании любых $n+k-3$ вершин).*

Доказательство. Очевидно □

Особенно важным и известным в коммутативной алгебре является условие 2-СМ, или дважды Коэн–Маколеевость. Сравнивая картинки 4 и 5 при $k = 2$, получаем важное утверждение

Предложение 4.19. *Гомологическая сфера является 2-СМ комплексом.*

Из предложений 4.18 и 4.19 следует

Теорема 4.20 (Аналог теоремы Балински)**.** *Одномерный остов $(n-1)$-мерной гомологической сферы является n-связным графом.*

Замечание 4.21. Теорема Балински утверждает, что реберный граф выпуклого n-мерного многогранника n-связен. Тут допускаются несимплициальные многогранники, поэтому ни одно из утверждений не является обобщением другого.

Упражнение 4.22. Придумайте пример $(n-1)$-мерной сферы, одномерный остов которой не $(n+1)$-связен.

Упражнение 4.23. Докажите, что не существует симплициального комплекса, который был бы одновременно 3-СМ и гомологической сферой.

A Топологические конструкции

Конечное частично упорядоченное множество (чум) S называется симплициальным, если в нем существует элемент, меньший всех других, и для любого элемента $I \in S$ нижний порядковый идеал $S_{\leqslant I} \stackrel{\text{def}}{=} \{J \in S \mid J \leqslant I\}$ изоморфен булевой решетке некоторого ранга k, зависящего от I (т.е. множеству подмножеств k-элементного множества). В этом случае элементы $I \in S$ называются симплексами, а число $k-1$ — размерностью симплекса I. Минимальный элемент называется пустым симплексом и обозначается $\hat{0}$.

Любой симплициальный комплекс является симплициальным чумом.

Определение A.1. Пусть S — симплициальный чум. Каждому непустому симплексу $I \in S \backslash \hat{0}$ сопоставим геометрический симплекс $\triangle_I$ (выпуклую оболочку $|I|$ точек общего положения), а каждой паре симплексов $I, J \in S \backslash \hat{0}$, такой что $I < J$ сопоставим отображение $\varphi_{I<J}\colon \triangle_I \to \triangle_J$, включающее в $\triangle_J$ ее грань на вершинах из множества I. Рассмотрим топологическое пространство

$$|S| \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{I \in S} \triangle_I \Big/ \sim,$$

где $x \sim \varphi_{I<J}(x)$ для всех $x \in \triangle_I$ и $J > I$. Пространство $|S|$ называется геометрической реализацией симплициального чума S.

Пространство $|S|$ имеет естественную структуру регулярного клеточного комплекса, в котором клетки соответствуют подмножествам $\triangle_I$. Все клетки являются симплексами. Такие пространства называются симплициально клеточными комплексами (см.[13, 12]).

Для симплициальных комплексов геометрическая реализация была также определена в 1, но результат обеих конструкций одинаков (упражнение).

B Градуированные коммутативные алгебры и модули

B.1 Основные определения

Алгебры Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле. Векторное пространство V над $\Bbbk$ называется градуированным, если фиксировано представление V в виде прямой суммы $\bigoplus_{j\geqslant 0} V_j$. Элементы из V_j называются однородными степени j. Рядом Гильберта–Пуанкаре градуированного пространства V называется формальный ряд $\mathrm{Hilb}(V;t) = \sum_{j=0}^{\infty} \dim V_j t^j \in \mathbb{Z}[[t]]$.

Градуированное векторное пространство A называется градуированной алгеброй, если задано билинейное отображение $A\times A \to A$ (умножение), такое, что произведение однородных элементов степеней j и k есть однородный элемент степени $j+k$. Мы всегда будем предполагать, что выполнены следующие свойства:

1. Существует единица, т.е. такой элемент $1 \in A$, что $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. Очевидно, что $1 \in A_0$.

2. Умножение ассоциативно, т.е. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

3. Умножение градуированно–коммутативно, т.е. $a \cdot b = (-1)^{kl} b \cdot a$, если $a \in A_k$, $b \in A_l$, либо просто коммутативно $a \cdot b = b \cdot a$.

Алгебра называется связной, если $A_0 \cong \Bbbk$ (иными словами, однородная компонента A_0 порождена единицей). В таком случае обозначим $\bigoplus_{j>0} A_j$ через A_+.

Как правило, мы будем рассматривать алгебры, у которых все нечетные компоненты нулевые. Для таких алгебр градуированная коммутативность совпадает с обычной коммутативностью. В дальнейшем предполагается, что алгебра A связна и коммутативна.

Пример B.1. Ключевой для нас пример алгебры (на самом деле, единственный, который нам реально нужен) — алгебра многочленов $\Bbbk[v_1, \dots, v_m]$, где $\deg v_i = 2$. Для краткости мы ее будем обозначать через $\Bbbk[m]$. Ее однородная компонента степени $2j$ порождена всевозможными мономами $v_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot v_m^{k_m}$, такими что $\sum k_i = j$, $k_i \geqslant 0$. Заметим, что размерность компоненты $\Bbbk[v_1, \dots, v_m]_{2j}$ равна числу всех таких мономов. Нетрудно посчитать (используя школьный метод шаров и перегородок), что это число равно $\binom{m+j-1}{j-1}$. Таким образом, $\mathrm{Hilb}(\Bbbk[m];t) = \frac{1}{(1-t^2)^m}$.

Модули Градуированное векторное пространство $M = \bigoplus_i M_i$ называется левым модулем над алгеброй $A = \bigoplus_i A_i$, если задано действие A на M, т.е. билинейное отображение $A \times M \to M$, такое что $A_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$ и выполнено $(a_1 \cdot a_2) \cdot \mu = a_1 \cdot (a_2 \cdot \mu)$ для любых $a_1, a_2 \in A$ и $\mu \in M$. Аналогично, $M = \bigoplus_i M_i$ называется правым модулем над $A = \bigoplus_i A_i$, если задано билинейное отображение $M \times A \to M$, такое что $M_j \cdot A_i \subset M_{i+j}$ и $\mu \cdot (a_1 \cdot a_2) = (\mu \cdot a_1) \cdot a_2$. Если A — коммутативна, то понятия левого и правого модуля совпадают, а если A — градуированно-коммутативна, то левый модуль можно превратить в правый модуль, немного подкрутив знаки. Так или иначе, мы будем рассматривать лишь коммутативный случай, и не будем различать правые и левые модули.

Пусть $\mathcal{I} \subset A$ — идеал в алгебре A, т.е. такое подмножество, что $\mathcal{I} \cdot A \subset \mathcal{I}$. Идеал называется однородным, если $\mathcal{I} = \bigoplus_j (\mathcal{I} \cap A_j)$. Например, любой идеал, порожденный набором однородных элементов, является однородным. Любой однородный идеал естественным образом превращается в модуль над алгеброй A.

С модулями над A можно делать очень много таких вещей, которые мы привыкли делать с векторными пространствами: можно брать прямые суммы, подмодули и фактор-модули. В частности, фактор-алгебра алгебры A по идеалу $\mathcal{I}$ также является модулем над A.

Для A-модуля M подмодуль

$$\operatorname{Soc} M = \{\mu \in M \mid A_+ \cdot \mu = 0\},$$

называется цоколем модуля M.

Гомоморфизмы Гомоморфизмом A-модулей называется такой гомоморфизм $\phi\colon M \to N$, что $\phi(M_j) \subset N_j$ и $\phi(a \cdot \mu) = a \cdot \phi(\mu)$ для любых $a \in A$, $\mu \in M$. Если же вместо первого свойства выполнено $\phi(M_j) \subset N_{j+s}$, то говорят, что ϕ — гомоморфизм, повышающий градуировку на s (или понижающий на $-s$, если $s < 0$). Также говорят, что ϕ является однородным гомоморфизмом степени s.

Изоморфизм модулей определяется стандартным образом (гомоморфизм, для которого существует обратный гомоморфизм).

Свободные модули Пусть S — произвольное множество (возможно, бесконечное) и каждому элементу $s \in S$ сопоставлено целое число d_s. Свободным модулем на S называется модуль $A\langle S\rangle$, состоящий из всевозможных выражений вида $\sum_{s \in S} a_s \cdot s$, где $a_s \in A$ и лишь конечное число коэффициентов a_s не равно нулю. Сложение и умножение на элементы алгебры A определяется естественным образом. Градуировка определяется правилом $\deg a_s = d_s$. Мощность $|S|$, в случае если она конечна, называется рангом свободного модуля $A\langle S\rangle$. Модули, изоморфные свободным, мы тоже называем свободными.

Конечно порожденные модули Модуль M называется конечно порожденным, если существует набор однородных элементов $\mu_1, \ldots, \mu_r \in M$, таких что любой элемент

$\mu \in M$ представляется в виде $a_1 \cdot \mu_1 + \dots + a_r \cdot \mu_r$ для некоторых $a_1, \dots, a_r \in A$. Если такое представление единственно, то M является свободным конечно порожденным.

Из теоремы Гильберта о базисе следует [18], что подмодуль конечно порожденного модуля над $\Bbbk[m]$ конечно порожден.

Цепные и коцепные комплексы, точные последовательности Последовательность гомоморфизмов A-модулей

$$\dots \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

называется точной, если $\operatorname{Im} f_j = \operatorname{Ker} f_{j+1}$. Последовательность гомоморфизмов A-модулей

$$\dots \to C_{j+1} \xrightarrow{\partial_{j+1}} C_j \xrightarrow{\partial_j} C_{j-1} \xrightarrow{\partial_{j-1}} \dots$$

называется цепным комплексом, если $\operatorname{Im} \partial_{j+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_j$. В этом случае модуль $H_j = \operatorname{Ker} \partial_j / \operatorname{Im} \partial_{j+1}$ называется модулем j-х гомологий. Аналогично, последовательность гомоморфизмов

$$\dots \to C^{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} C^j \xrightarrow{\partial_j} C^{j+1} \xrightarrow{\partial_{j+1}} \dots$$

называется коцепным комплексом, если $\operatorname{Im} \partial_{j-1} \subset \operatorname{Ker} \partial_j$. В этом случае модуль $H^j = \operatorname{Ker} d_j / \operatorname{Im} d_{j-1}$ называется модулем j-х когомологий. Как в цепном, так и в коцепном случае, d_j называется дифференциалами. Для удобства цепные комплексы обозначаются (C_*, ∂), а коцепные (C^*, d). Говорят, что задан гомоморфизм коцепных комплексов $f\colon (C^*, d) \to (D^*, d)$ если заданы гомоморфизмы A-модулей $f_j\colon C^j \to \widetilde{C}^j$, коммутирующие с дифференциалами. Гомоморфизм коцепных комплексов индуцирует гомоморфизм модулей когомологий $\widetilde{f}\colon H(C^*) \to H(D^*)$.

Пусть $f, g\colon C^* \to D^*$ гомоморфизмы коцепных комплексов. Коцепной гомотопией между f и g называется набор A-гомоморфизмов $s = \{s_i\colon C^i \to D^{i-1}$, таких что $ds + sd = f - g$. Если для f и g существует коцепная гомотопия, то f и g индуцируют одинаковый гомоморфизм в когомологиях. Два комплекса C^* и D^* называются гомотопически эквивалентными, если существуют два гомоморфизма $f\colon C^* \leftrightarrows D^*\colon h$, такие что fh гомотопен id_D, а hf гомотопен id_C. Когомологии гомотопически эквивалентных комплексов совпадают.

Тензорные произведения Пусть M и N — два модуля над алгеброй A. Рассмотрим свободный модуль $U_{M\times N}$ на множестве $M \times N$. Тензорным произведением $M \otimes_A N$ называется фактормодуль модуля $U_{M\times N}$ по подмодулю, порожденному элементами

$$(\mu_1 + \mu_2, \nu) - (\mu_1, \nu) - (\mu_2, \nu),$$

$$(a \cdot \mu, \nu) - a \cdot (\mu, \nu), \qquad (\mu, a \cdot \nu) - a \cdot (\mu, \nu),$$

взятыми для всех однородных элементов $\mu, \mu_1, \mu_2 \in M$, $\nu \in N$, $a \in A$. Градуировка на $M \otimes_A N$ вводится естественным образом: компонента $(M \otimes_A N)_j$ порождена классами элементов вида (μ, ν), где $\mu \in M_k$, $\nu \in N_l$ и $k + l = j$. Легко проверяются изоморфизмы $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$, $(M \otimes_A N) \otimes_A L \cong M \otimes_A (N \otimes_A L)$, $M \otimes_A A \cong M$, где A рассматривается как модуль над собой. Кроме того, тензорное произведение является двухместным ковариантным функтором, т.е. гомоморфизм $M_1 \to M_2$ индуцирует гомоморфизм $M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N$ (и аналогично для гомоморфизма $N_1 \to N_2$).

Заметим, что если M — свободный модуль на множестве S_1, а N — свободный модуль на множестве S_2, то $M \otimes N$ является свободным модулем на множестве $S_1 \times S_2$ (причем степень порождающего элемента (s_1, s_2) равна $\deg s_1 + \deg s_2$).

Модуль гомоморфизмов Пусть M, N — градуированные модули над коммутативной градуированной алгеброй A. На множестве $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ всех однородных A-модульных гомоморфизмов из M в N можно ввести структуру градуированного A-модуля, в которой градуированная компонента $\mathrm{Hom}_A(M, N)_j$ состоит из всех однородных гомоморфизмов степени j, а умножение гомоморфизмов на элементы из A задается “поточечно”: если $\phi\colon M \to N$ и $a \in A$, то $(a\phi)(\mu) = a\phi(\mu)$.

Заметим, что конструкция $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ контравариантна по аргументу M и ковариантна по аргументу N. Иными словами, гомоморфизм $M_1 \to M_2$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M_2, N) \to \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$, а гомоморфизм $N_1 \to N_2$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M, N_1) \to \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$.

B.2 Необходимые понятия из гомологической алгебры

Проективные и инъективные модули A-модуль M называется проективным, если для любого эпиморфизма $f\colon N_1 \twoheadrightarrow N_2$ и гомоморфизма $g\colon M \to N_2$ существует $h\colon M \to N_1$, такой что $f \circ h = g$:

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dotted, "h"] & \end{tikzcd}$$

Эквивалентно, M проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым свободного модуля.

Известно, что любой проективный модуль над $\Bbbk[m]$ является свободным. В неградуированном случае это — серьезная теорема Суслина–Квиллена. В градуированном случае это несложно доказывается. Поскольку мы будем работать над кольцом $\Bbbk[m]$, о понятии проективного модуля можно в дальнейшем забыть, поскольку вместо проективных мы будем рассматривать свободные модули.

A-модуль M называется инъективным, если для любого мономорфизма $f\colon N_1 \hookrightarrow N_2$ и гомоморфизма $g\colon N_1 \to M$ существует $h\colon N_2 \to M$, такой что $h \circ f = g$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N_2 \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Пример B.2. Этот пример нам понадобится. Рассмотрим градуированное векторное пространство $E(\Bbbk) = \Bbbk[v_1^{-1}, \dots, v_m^{-1}]$, где $\deg v_i^{-1} = -2$. Введем на $E(\Bbbk)$ структуру $\Bbbk[m]$-модуля, положив $v_i \cdot (v_1^{-k_1} \dots v_m^{-k_m})$ равным $v_1^{-k_1} \dots v_i^{-k_i+1} \dots v_m^{-k_m}$, если $k_i \geqslant 1$, и равным нулю иначе. Известно, что $E(\Bbbk)$ — инъективный модуль[6]. Заметим, что $E(\Bbbk)$ не является конечно порожденным.

Свободная резольвента Пусть M — конечно порожденный модуль над связной коммутативной алгеброй A. Последовательность гомоморфизмов

$$\dots \to R^{-j} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} R^{-2} \xrightarrow{d} R^{-1} \xrightarrow{d} R^0 \to M \to 0 \tag{B.1}$$

называется свободной (соотв. проективной) резольвентой модуля M, если она точна и R^{-j} свободны (соотв. проективны). Модуль R^{-j} называется модулем j-х сизигий модуля M (сизигии не являются однозначно определенным термином, поскольку у модуля M могут быть различные резольвенты). Если $R^{-j} = 0$ при $j > p$, и $R^{-p} \neq 0$, то p называется длиной резольвенты. Наименьшая возможная длина резольвенты (если существует) называется проективной размерностью модуля M и обозначается $\operatorname{pdim} M$.

Теорема B.3 (Теорема Гильберта о сизигиях)**.** *Конечно порожденный модуль над кольцом многочленов $\Bbbk[m]$ имеет проективную размерность не больше m.*

Резольвента называется минимальной, если $d(R^{-j}) \subseteq A_+ \cdot R^{-j+1}$. Минимальные резольвенты можно строить способом, описанным ниже. Мы будем предполагать, что $A = \Bbbk[m]$ (хотя то же самое построение работает для произвольного нетерова кольца A).

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_s$ — (минимальный по числу элементов) набор порождающих модуля M. Тогда существует эпиморфизм f из свободного модуля $R^0 = A\langle \mu_1, \dots, \mu_s \rangle$ в M. Ядро f лежит в $A_+ \cdot R^0$ (в противном случае мы бы имели $\sum_{i=1}^s a_i\mu_i = 0$ в M и какой-то из коэффициентов a_i лежит в $A_0 \cong \Bbbk$, но тогда соответствующая порождающая μ_i выражалась бы через остальные, а значит выбранный набор порождающих не был бы минимальным). По теореме Гильберта о базисе, $\operatorname{Ker} f \subset R^0$ является свободно порожденным модулем. Выберем в нем минимальную систему порождающих $r_1, \dots, r_k$ и построим естественный эпиморфизм d из свободного модуля $R^{-1} = A\langle r_1, \dots, r_k \rangle$ в $\operatorname{Ker} f \subset R^0$ (отображающий r_i в r_i). Как и ранее, получаем, что $\operatorname{Ker} d \in A_+ \cdot R^{-1}$. Далее продолжаем строить модули R^{-j} в том же духе.

Замечание B.4. Аналогичный процесс можно устроить в случае, когда M не является конечно порожденным, но при этом каждая градуированная компонента M_j является конечномерным векторным пространством (см.[14, Constr.A.2.2]).

Известно, что проективная размерность равна длине минимальной резольвенты (иными словами, среди всех резольвент минимальную длину имеет минимальная резольвента).

[6]Более того, $E(\Bbbk)$ есть минимальный инъективный модуль, содержащий $\Bbbk[m]$-модуль $\Bbbk$. Иными словами, $E(\Bbbk)$ есть инъективная оболочка модуля $\Bbbk$.

Инъективная резольвента Последовательность гомоморфизмов

$$0 \to M \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \cdots \to \mathcal{I}^l \to \cdots$$

называется инъективной резольвентой модуля M, если она точна и $\mathcal{I}^j$ инъективны. Известно, что инъективная резольвента существует, но может не быть конечной.

Тор-функтор Пусть M, N — модули, и $R^* \to M$ — свободная резольвента модуля M (краткое обозначение для (B.1)). Применим к R^* функтор $\otimes_A N$ (сам модуль M мы убрали из резольвенты):

$$\ldots \to R^{-j} \otimes_A N \xrightarrow{d \otimes_A N} \ldots \xrightarrow{d \otimes_A N} R^{-2} \otimes_A N \xrightarrow{d \otimes_A N} R^{-1} \otimes_A N \xrightarrow{d \otimes_A N} R^0 \otimes_A N \to 0. \qquad \text{(B.2)}$$

Поскольку $d \circ d = 0$ в R^*, имеем $(d \otimes_A N) \circ (d \otimes_A N) = 0$, т.е. (B.2) есть коцепной комплекс (однако он уже может не быть точным, в отличие от R^*). Модуль $(-j)$-х когомологий комплекса (B.2) обозначается $\mathrm{Tor}_A^{-j}(M, N)$. Известны следующие свойства (см.[24]):

1. $\mathrm{Tor}_A^{-j}(M, N)$ не зависит от выбора резольвенты R^* (таким образом, Тор-модули, в отличие от сизигий, являются инвариантным объектом).

2. $\mathrm{Tor}_A^{-j}(M, N) \cong \mathrm{Tor}_A^{-j}(N, M)$ (т.е. не имеет значения, чью резольвенту мы взяли в определении: мы могли бы с тем же успехом взять резольвенту модуля N, тензорно умножить на M и посчитать когомологии).

3. $\mathrm{Tor}_A^0(M, N) \cong M \otimes_A N$.

4. $\mathrm{Tor}^{-j}(\cdot, N)$ и $\mathrm{Tor}^{-j}(M, \cdot)$ являются ковариантными функторами.

5. Короткая точная последовательность $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \to \mathrm{Tor}_A^{-j}(M_1, N) \to \mathrm{Tor}_A^{-j}(M_2, N) \to \mathrm{Tor}_A^{-j}(M_3, N) \to \cdots \\ \cdots \to \mathrm{Tor}_A^{-1}(M_1, N) \to \mathrm{Tor}_A^{-1}(M_2, N) \to \mathrm{Tor}_A^{-1}(M_3, N) \to \\ \to \mathrm{Tor}_A^{0}(M_1, N) \to \mathrm{Tor}_A^{0}(M_2, N) \to \mathrm{Tor}_A^{0}(M_3, N) \to 0 \end{aligned} \qquad \text{(B.3)}$$

   (говоря абстрактным языком, Тор-функтор есть производный функтор функтора тензорного произведения).

6. Если M и N сами по себе являются коммутативными алгебрами (умножение в них должно быть совместимо с умножением на скаляры из A), то $\mathrm{Tor}_A^*(M, N) = \bigoplus_j \mathrm{Tor}_A^{-j}(M, N)$ также имеет структуру алгебры (это свойство менее общеизвестно, но оно следует из существования мультипликативных резольвент, см.[1]).

7. Пусть $\Bbbk$ снабжено структурой A-модуля посредством канонического эпиморфизма $A \to A/A_+ \cong \Bbbk$. Тогда $\mathrm{pdim}\, M = \max\{j \mid \mathrm{Tor}_A^{-j}(M, \Bbbk)\} \neq 0$.

Ext-функтор Пусть M, N — модули над коммутативной алгеброй A, а $R^* \to M$ — свободная резольвента модуля M. Применим к R^* контравариантный функтор $\mathrm{Hom}_A(\cdot, N)$. Получим дифференциальный комплекс

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(R^0, N) \to \mathrm{Hom}_A(R^{-1}, N) \to \mathrm{Hom}_A(R^{-2}, N) \to \cdots.$$

Его когомологии в позиции $-j$ обозначаются $\mathrm{Ext}^j_A(M, N)$ и называются Ext-модулями.

Свойства Ext-модулей во многом похожи на свойства Tor-модулей:

1. $\mathrm{Ext}^j_A(M, N)$ не зависит от выбора резольвенты R^*.

2. $\mathrm{Ext}^j_A(M, N)$ можно эквивалентно определить, применив функтор $\mathrm{Hom}_A(M, \cdot)$ к инъективной резольвенте модуля N, и взяв когомологии.

3. $\mathrm{Ext}^0_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

4. $\mathrm{Ext}^j(\cdot, N)$ является контравариантным функтором, а $\mathrm{Ext}^j(M, \cdot)$ — ковариантным.

5. Короткая точная последовательность $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^0(M_3, N) \to \mathrm{Ext}^0(M_2, N) \to \mathrm{Ext}^0(M_1, N) \to \\ \mathrm{Ext}^1(M_3, N) \to \mathrm{Ext}^1(M_2, N) \to \mathrm{Ext}^1(M_1, N) \to \cdots \\ \cdots \to \mathrm{Ext}^j(M_3, N) \to \mathrm{Ext}^j(M_2, N) \to \mathrm{Ext}^j(M_1, N) \to \cdots. \end{aligned} \tag{B.4}$$

6. Короткая точная последовательность $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^0(M, N_1) \to \mathrm{Ext}^0(M, N_2) \to \mathrm{Ext}^0(M, N_3) \to \\ \mathrm{Ext}^1(M, N_1) \to \mathrm{Ext}^1(M, N_2) \to \mathrm{Ext}^1(M, N_3) \to \cdots \\ \cdots \to \mathrm{Ext}^j(M, N_1) \to \mathrm{Ext}^j(M, N_2) \to \mathrm{Ext}^j(M, N_3) \to \cdots. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Резольвента Кошуля Алгебра $\Bbbk[m] = \Bbbk[v_1, \ldots, v_m]$ содержит единственный максимальный однородный идеал, а именно идеал $\Bbbk[m]_+ = (v_0, \ldots, v_m)$, состоящий из однородных многочленов положительной степени. Естественный эпиморфизм $\Bbbk[m] \to \Bbbk[m]/\Bbbk[m]_+ \cong \Bbbk$ превращает основное поле $\Bbbk$ в модуль над $\Bbbk[m]$. Разберемся, как устроена свободная резольвента $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk$.

Пусть $R^{-j}_{Kosz} = A\langle\binom{[m]}{j}\rangle$ — свободный A-модуль, порожденный множеством $\binom{[m]}{j}$ (т.е. множеством всех j-подмножеств множества $[m]$). Градуировка задается так: $\deg\{i_1, \ldots, i_j\} = 2j$ для $\{i_1, \ldots, i_j\} \in \binom{[m]}{j}$. Определим гомоморфизм $d\colon R^{-j}_{Kosz} \to R^{-(j-1)}_{Kosz}$, задав его на порождающих:

$$d\{i_1, \ldots, i_j\} = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} v_{i_k} \cdot \{i_1, \ldots, \widehat{i_k}, \ldots, i_j\}. \tag{B.6}$$

Заметим, что модуль R^0_{Kosz} порожден одним элементом $\varnothing \in \binom{[m]}{0}$, имеющим степень 0, значит $R^0_{Kosz} \cong \Bbbk[m]$. Пусть $\Bbbk[m] \cong R^0_{Kosz} \to \Bbbk$ — отображение, введенное выше.

Утверждение B.5 (Резольвента Кошуля)**.** *Последовательность гомоморфизмов*

$$0 \to R^{-m}_{Kosz} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} R^{-2}_{Kosz} \xrightarrow{d} R^{-1}_{Kosz} \xrightarrow{d} R^0_{Kosz} \to \Bbbk \to 0$$

является свободной резольвентой $\Bbbk[m]$*-модуля* $\Bbbk$*.*

Доказательство. Заметим, что вместо градуировки в $\Bbbk[m]$ можно ввести мультиградуировку: будем говорить, что моном $v_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot v_m^{k_m}$ имеет мультиградуировку $(2k_1, \dots, 2k_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$. Все модули R^{-j}_{Kosz} можно сделать мультиградуированными, если положить мультиградуировку порождающего элемента $\{i_1, \dots, i_j\} \in R^{-j}_{Kosz}$ равной $(0, \dots, 2, \dots, 2, \dots, 0)$, где двойки стоят на позициях $i_1, \dots, i_j$, а нули — на всех прочих. Легко видеть, что все дифференциалы сохраняют мультиградуировку, а значит наша последовательность распадается в прямую сумму

$$\bigoplus_{\overline{k}=(2k_1,\dots,2k_m)\in\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}} \left(0 \to (R^{-m}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} (R^{-2}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} (R^{-1}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} (R^0_{Kosz})_{\overline{k}} \to \Bbbk_{\overline{k}} \to 0\right),$$

где $M_{\overline{k}}$ обозначает однородную компоненту M мультиградуировки $\overline{k}$. Разберем два случая: пусть для начала $\operatorname{supp}(\overline{k}) \neq \varnothing$ (т.е. $\overline{k} \neq (0, 0, \dots, 0)$). Тогда $\Bbbk_{\overline{k}} = 0$, а коцепной комплекс $\Bbbk$-векторных пространств

$$0 \to (R^{-m}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} (R^{-2}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} (R^{-1}_{Kosz})_{\overline{k}} \xrightarrow{d} (R^0_{Kosz})_{\overline{k}} \to 0 \tag{B.7}$$

совпадает по определению с аугментированным комплексом симплициальных цепей полного симплекса на множестве $\operatorname{supp}(\overline{k})$ (проверьте!). Значит, гомологии комплекса (B.7) совпадают с приведенными гомологиями симплекса, которые равны нулю, поскольку симплекс стягиваем. Значит, последовательность (B.7) точна.

Если же $\overline{k} = (0, 0, \dots, 0)$, то (B.7) превращается в $0 \to \Bbbk \to \Bbbk \to 0$. Значит, последовательность точна во всех мультиградуировках, откуда и следует утверждение. □

Из определения дифференциала следует, что $dR^{-j}_{Kosz} \subset \Bbbk[m]_+ \cdot R^{-j+1}_{Kosz}$, т.е. резольвента Кошуля является минимальной.

Напоследок дадим более стандартное описание резольвенты Кошуля. Пусть $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ — внешняя алгебра от m образующих, а $\Lambda[u_1, \dots, u_m]_j$ — ее компонента, порожденная некоммутативными мономами от j переменных. Тогда R^{-j}_{Kosz} можно отождествить с A-модулем $\Lambda[u_1, \dots, u_m]_j \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[m]$. Дифференциал d можно задать на порождающих алгебры как $du_i = v_i$, $dv_i = 0$, а затем продолжить по правилу Лейбница $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^i a \cdot db$ (здесь мы считаем, что u_i имеют степень -1). Из этой конструкции ясно видно, что резольвента Кошуля мультипликативна: на ней определено умножение, пускай кососкоммутативное.

Предложение B.6. *Пусть M — произвольный $\Bbbk[m]$-модуль. Тогда* $\mathrm{Tor}^{-j}_{\Bbbk[m]}(M,\Bbbk) \cong H^j(M \otimes_{\Bbbk} \Lambda[u_1,\dots,u_m], d)$*, где дифференциал действует по формуле*

$$d(u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_j} \otimes \mu) = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} u_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{u_{i_k}} \wedge \dots \wedge u_{i_j} \otimes v_{i_k} \cdot \mu.$$

Если M сам является алгеброй, то $\mathrm{Tor}^{*}_{\Bbbk[m]}(M,\Bbbk) = \bigoplus_j \mathrm{Tor}^{-j}_{\Bbbk[m]}(M,\Bbbk)$ *является алгеброй когомологий алгебры* $M \otimes_{\Bbbk} \Lambda[u_1,\dots,u_m]$.

Доказательство. Применим к резольвенте Кошуля функтор $\otimes_{\Bbbk[m]} M$. Получим

$$\Lambda[u_1,\dots,u_m]_j \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[m] \otimes_{\Bbbk[m]} M \cong \Lambda[u_1,\dots,u_m]_j \otimes_{\Bbbk} M.$$

Утверждение про дифференциал напрямую следует из формулы (B.6). □

Следствие B.7. $\mathrm{Tor}^{*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk,\Bbbk) \cong \Lambda[u_1,\dots,u_m]$.

B.3 Однородные системы параметров и регулярные последовательности

Системы параметров Далее будет предполагаться, что A конечно порождена как алгебра, а M конечно порожден как модуль над A.

Размерностью Крулля $\dim A$ алгебры A называется наибольшее число алгебраически независимых элементов в A. Заметим, что размерность Крулля равна нулю в том и только том случае, когда A является конечномерным векторным пространством.

Доказательство. Если A конечномерна как векторное пространство, то, очевидно, что алгебраически независимых элементов в ней нет. Пусть теперь размерность Крулля равна 0. Если $a_1,\dots,a_l$ — порождающие, то для каждой из них существует такое число k_i, что $a_i^{k_i} = 0$ (поскольку каждая из них не является алгебраически независимой). Тогда конечное множество мономов $a_1^{j_1}\cdots a_l^{j_l}$, $0 \leqslant j_i < k_i$ порождает A как векторное пространство. □

В частности, если $\dim A = 0$, то ряд $\mathrm{Hilb}(A^*;t)$ обрывается (т.е. является многочленом).

Утверждение B.8. *Пусть $\theta_1,\dots,\theta_n$ — набор алгебраически независимых однородных элементов алгебры A, а $(\theta_1,\dots,\theta_n) \subset A$ — порожденный ими идеал. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\dim A/(\theta_1,\dots,\theta_n) = 0$;

2. $A/(\theta_1,\dots,\theta_n)$ *является конечномерным векторным пространством;*

3. A *является конечнопорожденным модулем над своим подкольцом* $\Bbbk[\theta_1,\dots,\theta_n]$.

Из этих утверждений следует, что $n = \dim A$.

Доказательство очевидно. Если выполнено любое из этих эквивалентных условий, то $\theta_1, \ldots, \theta_n$ называется однородной системой параметров (о.с.п.) для алгебры A.

Введенные понятия можно обобщить на модули. Размерностью Крулля конечно порожденного A-модуля M называется размерность Крулля алгебры $A/\operatorname{Ann}(M)$, где $\operatorname{Ann}(M) = \{a \in A \mid a \cdot M = 0\}$. Поскольку M можно считать как модулем над A, так и модулем над $A/\operatorname{Ann}(M)$, получаем, что M имеет нулевую размерность Крулля в том и только том случае, когда M — конечномерное векторное пространство.

Набор однородных алгебраически независимых элементов $\theta_1, \ldots, \theta_n \in A$ называется однородной системой параметров для модуля M, если размерность Крулля фактормодуля $M/(\theta_1 M + \cdots + \theta_n M)$ равна нулю. Однородная система параметров называется линейной системой параметров (л.с.п.), если все ее элементы имеют степень 2.

Теорема B.9 (Градуированная версия леммы Нётер о нормализации[10, Thm.1.5.17]). *Однородная система параметров существует для любого A-модуля M. Если $\Bbbk$ бесконечно, и A порождена элементами степени 2, то существует линейная система параметров.*

Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — л.с.п. алгебры A. Имеем, с одной стороны, $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n] \subset A$, следовательно $\frac{1}{(1-t^2)^n} = \operatorname{Hilb}(\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n]; t) \leqslant \operatorname{Hilb}(A; t)$. С другой стороны, A есть конечнопорожденный модуль над $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_n]$, значит $\operatorname{Hilb}(A; t) \leqslant \frac{Q(t)}{(1-t^2)^n}$, где $Q(t)$ — некоторый многочлен. Нетрудно видеть, что у рядов $\frac{Q(t)}{(1-t^2)^n}$ и $\frac{1}{(1-t^2)^n}$ коэффициенты d_j при члене t^j растут как j^{n-1}. Значит, то же верно и для ряда $\operatorname{Hilb}(A; t)$. Таким образом, размерность Крулля алгебры A можно извлечь из ее ряда Гильберта–Пуанкаре (мы сделали это для алгебры, порожденной элементами степени 2, но аналогичное рассуждение работает и в общем случае). Говоря иными словами, размерность Крулля алгебры A равна порядку полюса мероморфной функции $\operatorname{Hilb}(A; t)$ в точке $t = 1$.

Аналогичные утверждения верны для модулей.

Регулярные последовательности Последовательность $\theta_1, \ldots, \theta_k$ однородных (положительной степени) элементов алгебры A называется регулярной для модуля M, если θ_{j+1} не является делителем нуля для A-модуля $M/(\theta_1 \cdot M + \cdots + \theta_j \cdot M)$ при $j = 0, \ldots, k-1$ (при $j = 0$ требуется, чтобы θ_1 не был делителем нуля для M).

Упражнение B.10. Докажите, что элементы регулярной последовательности алгебраически независимы как в алгебре A, так и в $A/\operatorname{Ann}(M)$.

Предложение B.11. *Последовательность $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in A$ является регулярной для M тогда и только тогда, когда M является свободным модулем над подкольцом $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_k] \subset A$.*

Доказательство. Для начала докажем лемму, представляющую самостоятельный интерес. Если M — модуль над A, и $\theta_1, \ldots, \theta_k \in A$, то для простоты будем обозначать модуль $M/(\theta_1 \cdot M + \cdots + \theta_k \cdot M)$ через $M/\theta M$. Заметим, что $M/\theta M$ является не только A-модулем, но и $A/\theta A$-модулем.

Лемма B.12. *Пусть дана точная последовательность A-модулей*

$$\cdots \to M^j \xrightarrow{f_j} M^{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} M^0 \xrightarrow{f_0} M^{-1} \to 0,$$

и $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in A$ — регулярная последовательность для каждого модуля M^i. Тогда последовательность

$$\cdots \to M^j/\theta M^j \xrightarrow{\bar{f}_j} M^{j-1}/\theta M^{j-1} \xrightarrow{\bar{f}_{j-1}} \cdots \xrightarrow{\bar{f}_1} M^0/\theta M^0 \xrightarrow{\bar{f}_0} M^{-1}/\theta M^{-1} \to 0 \qquad \text{(B.8)}$$

является точной последовательностью $A/\theta A$-модулей.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение в случае, когда регулярная последовательность состоит из одного элемента θ. Поскольку $M/\theta M \cong M \otimes_A (A/\theta A)$, а функтор тензорного произведения точен справа, точность последовательности (B.8) в самом правом члене доказана. Докажем, что последовательность

$$M^{j+1}/\theta M^{j+1} \xrightarrow{\bar{f}_{j+1}} M^j/\theta M^j \xrightarrow{\bar{f}_j} M^{j-1}/\theta M^{j-1} \xrightarrow{\bar{f}_{j-1}} M^{j-2/\theta M^{j-2}}.$$

точна в члене j. Пусть $\bar{x}$ обозначает класс элемента $x \in M^j$ в фактор-модуле $M^j/\theta M^j$. Пусть $\bar{f}_j(\bar{x}) = 0$. Тогда $f_j(x) \in \theta M^{j-1}$, то есть $f_j(x) = \theta y$ для некоторого $y \in M^{j-1}$. Поскольку $\theta y = f_j(x)$, имеем $\theta f_{j-1}(y) = f_{j-1}(\theta y) = 0$. Поскольку θ — не делитель нуля, получаем $f_{j-1}(y) = 0$. Из точности исходной последовательности получаем $y = f_j(z)$ для некоторого $z \in M^j$. Поскольку $f_j(x) = \theta y = f_j(\theta z)$, имеем $f_j(x - \theta z) = 0$. Значит $x - \theta z = f_{j+1}(u)$ для некоторого $u \in M^{j+1}$. Классы элементов x и $u - \theta z$ в $M^j/\theta M^j$ совпадают, значит $\bar{x} = \bar{f}_{j+1}(\bar{u})$, что и требовалось доказать. □

Теперь докажем предложение. Пусть

$$\ldots \to R^{-j} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} R^{-2} \xrightarrow{d} R^{-1} \xrightarrow{d} R^0 \to M \to 0$$

— минимальная свободная резольвента модуля M над кольцом $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_k]$. Последовательность $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ является регулярной последовательностью для кольца $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_k]$, а значит и для всех свободных модулей R^{-j} над этим кольцом. Заметим, что $R^{-j} \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_k] \cong R^{-j}/\theta R^{-j}$. Из определения минимальной резольвенты следует, что $d \otimes_{\Bbbk[\theta_1,\ldots,\theta_k]} \Bbbk = 0$. С другой стороны, согласно лемме B.12, последовательность

$$\ldots \to R^{-j}/\theta R^{-j} \otimes \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{0} R^{-2}/\theta R^{-2} \xrightarrow{0} R^{-1}/\theta R^{-1} \xrightarrow{0} R^0 \to M \to 0$$

точна. Значит $R^{-j}/\theta R^{-j} = 0$, а следовательно и $R^{-j} = 0$ при $j > 0$. Таким образом, гомоморфизм $R^0 \to M$ является изоморфизмом и M — свободный модуль над $\Bbbk[\theta_1, \ldots, \theta_k]$. □

Из только что доказанного предложения в частности следует, что регулярность последовательности $\theta_1, \ldots, \theta_k \in A$ не зависит от порядка элементов последовательности.

Лемма B.13. *Пусть θ — A-регулярна и M-регулярна. Тогда*

$$\mathrm{Tor}_{A/\theta}^{-i}(M/\theta M, \Bbbk) \cong \mathrm{Tor}_A^{-i}(M, \Bbbk)$$

Доказательство. Применить Лемму B.12 к свободной резольвенте модуля M. $\square$

M-регулярная последовательность называется максимальной, если она не содержится в большей регулярной последовательности.

Теорема B.14 (Теорема Риса)**.** *Длины всех максимальных регулярных последовательностей совпадают и равны числу* $\operatorname{depth}_A M = \min\{j \mid \mathrm{Ext}_A^j(\Bbbk, M) \neq 0\}$.

Доказательство. См.[14, Th.A.3.6]. Вначале докажем индукцией по j, что если $\theta_1, \dots, \theta_j$ — M-регулярная последовательность (не обязательно максимальная), то $\mathrm{Ext}_A^j(\Bbbk; M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta M)$. База очевидна.

Последний элемент θ_j является M-регулярным. Рассмотрим короткую точную последовательность $0 \to M \stackrel{\times\theta_j}{\to} M \to M/\theta_j \to 0$ и рассмотрим индуцированную длинную точную последовательность Ext-модулей. Гомоморфизм $\Bbbk \stackrel{\times\theta_j}{\to} \Bbbk$ нулевой, поэтому он индуцирует нулевой гомоморфизм $\mathrm{Ext}_A^s(\Bbbk, M) \to \mathrm{Ext}_A^s(\Bbbk, M)$, а вся длинная точная последовательность расщепляется на короткие

$$0 \to \mathrm{Ext}_A^{j-1}(\Bbbk, M) \to \mathrm{Ext}_A^{j-1}(\Bbbk, M/\theta_j M) \to \mathrm{Ext}_A^j(\Bbbk, M) \to 0$$

Пусть $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_{j-1})$. По индукции имеем $\mathrm{Ext}_A^{j-1}(\Bbbk, M) = \mathrm{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta' M)$. Последний модуль равен нулю, поскольку элемент θ_j является $M/\theta' M$-регулярным, а значит у A-модуля $M/\theta' M$ нет цоколя, а значит модулю $\Bbbk$ некуда отображаться, кроме как в ноль. Таким образом, из короткой точной последовательности следует изоморфизм $\mathrm{Ext}_A^{j-1}(\Bbbk, M/\theta_j M) \cong \mathrm{Ext}_A^j(\Bbbk, M)$. По индукции имеем $\mathrm{Ext}_A^{j-1}(\Bbbk, M/\theta_j M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta M)$. Вспомогательное утверждение доказано.

Теперь доказательство теоремы почти очевидно. Пусть d — длина максимальной M-регулярной последовательности θ. Тогда $\mathrm{Ext}_A^d(\Bbbk, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta M) \neq 0$, потому что у $M/\theta M$ нет регулярных элементов, а значит в этом модуле есть цоколь, куда можно отобразить $\Bbbk$. При $j < d$ имеем $\mathrm{Ext}_A^j(\Bbbk, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Bbbk, M/\theta_1 M + \dots + \theta_j M) = 0$, поскольку θ_{j+1} является регулярным элементом относительно $M/\theta_1 M + \dots + \theta_j M$, а значит в этом модуле нет цоколя. $\square$

Число $\operatorname{depth}_A M$ называется глубиной модуля M. Поскольку элементы регулярной последовательности алгебраически независимы, глубина не превосходит размерности Крулля:

$$\operatorname{depth}_A M \leqslant \dim M. \tag{B.9}$$

Имеет смысл говорить об A-регулярных последовательностях и глубине алгебры A, поскольку A можно рассматривать как модуль над собой. Приведем еще один фундаментальный результат, связывающий две гомологические характеристики модуля: глубину и проективную размерность.

Теорема B.15 (Теорема Ауслендера–Буксбаума)**.** *Пусть A-модуль M ненулевой и* $\operatorname{pdim} M < \infty$*. Тогда*

$$\operatorname{pdim} M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A.$$

Доказательство. Допустим вначале, что $\operatorname{depth} A = 0$. Рассмотрим минимальную резольвенту M, конечную по условию:

$$0 \to R^{-p} \xrightarrow{d_p} R^{-p+1} \to \cdots \to R^0 \to M \to 0.$$

По теореме Риса $\operatorname{Hom}_A(\Bbbk, A) = \operatorname{Ext}^0_A(\Bbbk, A) \neq 0$, а значит существует мономорфизм A-модулей $i\colon \Bbbk \to A$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} R^{-p} \otimes_A \Bbbk \arrow[r, "d_p \otimes_A \Bbbk"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes_A i"'] & R^{-p+1} \otimes_A \Bbbk \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes_A i"'] \\ R^{-p} \arrow[r, "d_p"] & R^{-p+1} \end{tikzcd}$$

Вертикальные стрелки — мономорфизмы, поскольку R^{-j} — свободны, d_p тоже мономорфно. Значит $d_P \otimes_A \Bbbk$ мономорфно — противоречие с минимальностью резольвенты. Значит $p = \operatorname{pdim} M = 0$. Значит M — свободный A-модуль и следовательно $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A = 0$.

Теперь пусть $\operatorname{depth} A > 0$. Пусть $\operatorname{depth} M = 0$. Рассмотрим $M_1 = \operatorname{Ker}(R^0 \to M)$. Короткая точная последовательность $0 \to M_1 \to R^0 \to M \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность Ext-модулей; из нее и теоремы Риса легко вывести, что $\operatorname{depth} M_1 = 1$. С другой стороны, $\operatorname{pdim} M_1 = \operatorname{pdim} M - 1$ (поскольку резольвента для M без нулевого члена — это и есть резольвента для M_1). Значит из формулы Ауслендера–Буксбаума для M_1 следует она же для M. Поэтому можно считать $\operatorname{depth} M > 0$.

Поскольку $\operatorname{depth} A > 0$ и $\operatorname{depth} M > 0$, существует $\theta \in A$, который и A-регулярен и M-регулярен (упражнение). По определению глубины имеем $\operatorname{depth}_{A/\theta} A/\theta = \operatorname{depth}_A A - 1$ и $\operatorname{depth}_{A/\theta} M/\theta M = \operatorname{depth}_A M - 1$. С другой стороны, из Леммы B.13 следует, что $\operatorname{pdim}_{A/\theta} M/\theta M = \operatorname{pdim}_A M$. Доказательство завершается индукцией по $\operatorname{depth} A$. □

Если $A = \Bbbk[m]$ — алгебра многочленов, то любой модуль над A имеет конечную резольвенту по теореме Гильберта о сизигиях. Заметив, что $\operatorname{depth} \Bbbk[m] = m$, получаем

Следствие B.16. *Пусть M — ненулевой модуль над алгеброй* $\Bbbk[m]$*. Тогда* $\operatorname{depth} M = m - \operatorname{pdim} M$*.*

Модули и алгебры Коэна–Маколея

Определение B.17. A-модуль M называется модулем Коэна–Маколея, если $\operatorname{depth} M = \dim M$. Алгебра A называется алгеброй Коэна–Маколея, если она является A-модулем Коэна–Маколея.

Иными словами, модули Коэна–Маколея — это в точности те модули, для которых в (B.9) достигается равенство.

Предложение B.18. *Пусть M — модуль Коэна–Маколея над A. Тогда $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ является регулярной последовательностью тогда и только тогда, когда $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ является частью однородной системы параметров.*

То что любую регулярную последовательность можно дополнить до однородной системы параметров — несложное упражнение. Тот факт, что однородные системы параметров являются максимальными регулярными последовательностями — см.[10, Th.2.1.2(c)].

Из предыдущих рассмотрений следует

Предложение B.19. *Алгебра A является алгеброй Коэна–Маколея в том и только том случае, когда она является свободным конечно порожденным модулем над подалгеброй многочленов.*

B.4 Локальные когомологии модулей

На мой взгляд, самым емким и в то же время понятным текстом по локальным когомологиям является [22]. Я привожу краткую выжимку оттуда.

Функтор кручения и его производный Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал алгебры A (например, максимальный градуированный идеал A_+), а M — модуль над A. Подмодуль

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{\mu \in M \mid \exists l > 0, \mathfrak{a}^l \mu = 0\}$$

называется подмодулем $\mathfrak{a}$-кручения. Гомоморфизм $f\colon M \to N$ отображает $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ в $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. Значит определено индуцированное отображение модулей кручения и, следовательно, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\cdot)$ является функтором. Он аддитивен и точен слева.

Пусть $0 \to M \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \mathcal{I}^2 \to \cdots$ — инъективная резольвента модуля M. Применим к аугментированной резольвенте функтор $\Gamma_{\mathfrak{a}}$:

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}^0) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}^1) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}^2) \to \cdots$$

Когомологии полученного комплекса называются локальными когомологиями модуля M (относительно идеала $\mathfrak{a} \subset A$) и обозначаются $H^j_{\mathfrak{a}}(M)$. Если $\mathfrak{a} = A_+$, то будем для простоты писать $H^j(M)$. Заметим, что локальные когомологии — это не просто векторные пространства, а снова модули над A.

Из построения очевидно следует, что если $\mathcal{I}$ — инъективный модуль, то $H^j_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}) = 0$ при $j > 0$ (поскольку $\mathcal{I}$ является своей же собственной инъективной резольвентой).

Основные свойства локальных когомологий таковы:

1. Локальные когомологии не зависят от выбора инъективной резольвенты.

2. $H^0_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$.

3. $H^j_{\mathfrak{a}}(M)$ является $\mathfrak{a}$-кручением.

4. Короткая точная последовательность A-модулей $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ индуцирует длинную точную последовательность

$$\begin{aligned}0 \to H^0_{\mathfrak{a}}(M_1) \to H^0_{\mathfrak{a}}(M_2) \to H^0_{\mathfrak{a}}(M_3) \to &\\ H^1_{\mathfrak{a}}(M_1) \to H^1_{\mathfrak{a}}(M_2) \to H^1_{\mathfrak{a}}(M_3) \to \cdots &\\ \cdots \to H^j_{\mathfrak{a}}(M_1) \to H^j_{\mathfrak{a}}(M_2) \to H^j_{\mathfrak{a}}(M_3) \to \cdots .&\end{aligned} \qquad \text{(B.10)}$$

5. Если $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$, то $H^j_{\mathfrak{a}}(M) = H^j_{\mathfrak{b}}(M)$.

Утверждение B.20. *Если M, как векторное пространство, имеет конечную размерность, то $H^0(M) = M$.*

Доказательство. Любой элемент модуля M лежит в A_+-кручении, значит $H^0(M) = \Gamma_{A_+}(M) = M$. □

Список литературы

[1] L.Avramov, *Infinite free resolutions*, ??.

[2] Л. Л. Аврамов, Е. С. Голод, *Об алгебре гомологий комплекса Козюля локального кольца Горенштейна*, Матем. заметки, Т.9, вып.1, с.53–58, 1971.

[3] I.Anderson, *Combinatorics of finite sets.*

[4] А. А. Айзенберг, *Топологические приложения свойств колец Стенли–Райснера симплициальных комплексов*, Тр. ММО, 73, 2012, 47–85)

[5] И. В. Баскаков, *Когомологии K-степеней пространств и комбинаторика симплициальных разбиений*, УМН, 57:5(347) (2002), 147-148.

[6] D. Barnette, *The triangulations of the 3-sphere with up to 8 vertices*, J. Combinatorial Theory, Ser.A, 1973, V.14, 37–52.

[7] L. Billera, C.Lee, *Sufficiency of McMullenЎs conditions for f-vectors of simplicial polytopes*, Bull. Amer. Math. Soc. 2, 1980, 181–185.

[8] A. Björner, A. Paffenholz, J. Sjöstrand, G.M. Ziegler, *Bier spheres and posets*, Discrete Comput. Geom. 34 (2005), 71–86.

[9] M. Brion, *Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry*, Banach Center Publications 36:1 (1996) 25–44.

[10] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings, revised edition*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, V39.

[11] В. М. Бухштабер, *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения*, Тр.МИАН, 2008, Том 263, 18–43.

[12] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов, *Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия*, Труды Матем. Инст. им. В.А.Стеклова, т.247 (2004), стр.41–58.

[13] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике.*

[14] V. Buchstaber, T. Panov, *Toric Topology*, Math. Surveys Monogr., 204, AMS.

[15] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, *О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы*, УМН, 29:5(179) (1974), 71–168.

[16] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., 62:2 (1991), 417–451.

[17] B.Grunbaum, *Convex polytopes*, Grad. Texts in Math. 221.

[18] О.Зарисский, П.Самюэль, *Коммутативная алгебра*, 1963.

[19] T. Harima, T. Maeno, H. Morita, Ya. Numata, A. Wachi, J. Watanabe, *The Lefschetz Properties*, 2013.

[20] A. Hattori, M. Masuda, *Theory of multi-fans*, Osaka J. Math. 40 (2003), 1–68.

[21] M. Hochster, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in Ring theory, II (Proc. Second Conf.,Univ. Oklahoma, Norman, Okla., 1975), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 26, 171–223, Dekker, New York, 1977.

[22] S.Iyengar,G.Leuschke, A.Leykin, C.Miller, E.Miller, A.Singh, U.Walther, *Twenty-four hours of local cohomology*, Grad. Studies in Math. 87.

[23] F. S. Macaulay, *Some properties of enumeration on the theory of modular systems*, Proc. London Math. Soc. vol.26, 531–555, 1927.

[24] С. Маклейн, *Гомология*, 1966.

[25] Ю.В.Матиясевичб *Алгоритм Тарского*, Компьютерные инструменты в образовании, 6, 2008.

[26] D. M. Meyer, L. Smith, *Poincaré Duality Algebras, Macaulay's Dual Systems, and Steenrod Operations*, Cambridge Tracts in Mathematics, 2005.

[27] James R. Munkres, *Topological results in combinatorics*, Michigan Math. J., V. 31, Issue 1 (1984), pp. 113–128.

[28] I. Novik, Ed Swartz, *Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets*, Adv. Math., 222 (2009), 2059–2084.

[29] I. Novik, E. Swartz, *Gorenstein rings through face rings of manifolds*, Composit. Math. 145 (2009), 993–1000.

[30] G. Reisner, *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings* Advances in math. 1976. V.21, №1. P.30-49.

[31] C.P.Rourke, B.J.Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, 1972.

[32] P. Schenzel, *On the Number of Faces of Simplicial Complexes and the Purity of Frobenius*, Math. Zeitschrift 178, 125–142 (1981).

[33] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics V. 41.Inc., 1996.

[34] R. Stanley, *Cohen-Macaulay complexes*, in Higher Combinatorics (M. Aigner, ed.), NATO Advanced Study Institute Series, Reidel, Dordrecht/Boston, (1977), 51–62.

[35] R. Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, Adv. Math. 35 (1980), 236–238.

[36] R. Stanley, *Hilbert Functions of Graded Algebras*, Adv. Math. 28, 57–83 (1978).

[37] J.Stückrad, W.Vogel, *Buchsbaum rings: an interaction between algebra, geometry and topology.*

[38] V. A. Timorin, *An analogue of the Hodge–Riemann relations for simple convex polytopes*, Russian Math. Surveys 54:2 381–426 (1999).

[39] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, *Курс гомотопической топологии.*

[40] А.Хатчер, *Алгебраическая топология.*

[41] Г.Циглер, *Теория многогранников.*