**Лекция 10**

## 0.1 Смешанный набор связей

В математической физике часто встречаются модели, содержащие одновременно связи и первого, и второго родов. Общая схема исследования таких моделей следующая.

Допустим, что на фазовом пространстве $\mathbb{N}$, задан некоторый набор связей

$$\Psi^r(q,p) = 0, \qquad r = 1, \dots, \text{R}. \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу скобок Пуассона

$$[\Psi^r, \Psi^s]. \tag{2}$$

В общем случае ранг этой матрицы может меняться от точки к точке фазового пространства. Мы предположим, что ранг матрицы (2) постоянен на поверхности связей $\Psi = 0$ и равен $2\text{M}$. В силу непрерывности он также равен $2\text{M}$ в некоторой окрестности $\mathbb{U}_\Psi$ поверхности связей. С помощью линейного преобразования (**??**) перейдем к системе эквивалентных связей, такой, чтобы максимальный минор матрицы (2) с отличным от нуля определителем стоял в верхнем левом углу. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что все связи делятся на два класса:

$$\{\Psi^r\} = \{\Phi^\mu, G_\text{A}\}, \qquad \mu = 1, \dots, 2\text{M}, \quad \text{A} = 1, \dots, \text{L}, \quad 2\text{M} + \text{L} = \text{R}.$$

Матрица скобок Пуассона в общем случае имеет вид

$$\big([\Psi^r, \Psi^s]\big) = \begin{pmatrix} [\Phi^\mu, \Phi^\nu] & [\Phi^\mu, G_\text{B}] \\ [G_\text{A}, \Phi^\nu] & [G_\text{A}, G_\text{B}] \end{pmatrix},$$

где $\mathsf{det}\,\big[\Phi^\mu, \Phi^\nu\big]_{\mathbb{U}_\Psi} \neq 0$.

Теперь сдвинем связи

$$G_\text{A} \mapsto \tilde{G}_\text{A} := G_\text{A} + \lambda_{\text{A}\nu}\Phi^\nu,$$

где $\lambda_{\text{A}\nu} = \lambda_{\text{A}\nu}(q,p)$ – некоторые функции. Подберем эти функции так, чтобы было выполнено равенство

$$\big[\tilde{G}_\text{A}, \Phi^\mu\big] = \big[G_\text{A}, \Phi^\mu\big] + \lambda_{\text{A}\nu}\big[\Phi^\nu, \Phi^\mu\big] = 0.$$

Эти уравнения для $\lambda_{\text{A}\nu}$ имеют однозначное решение, т.к. $\mathsf{det}\,\big[\Phi^\mu, \Phi^\nu\big]_{\mathbb{U}_\Psi} \neq 0$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что в окрестности $\mathbb{U}_\Psi$ матрица скобок Пуассона имеет блочно диагональный вид

$$\big([\Psi^r, \Psi^s]\big)_{\mathbb{U}_\Psi} = \begin{pmatrix} \big[\Phi^\mu, \Phi^\nu\big] & 0 \\ 0 & \big[G_\text{A}, G_\text{B}\big] \end{pmatrix}_{\mathbb{U}_\Psi},$$

где у связей $G_\text{A}$ мы отбросили знак тильды. По построению, ранг матрицы $[\Phi^\mu, \Phi^\nu]$ максимален и равен $2\text{M}$ на поверхности связей. С учетом антисимметрии матрицы $[G_\text{A}, G_\text{B}]$ отсюда следует, что на поверхности связей $\Psi = 0$ все элементы матрицы $[G_\text{A}, G_\text{B}]$ обращаются в нуль. Поэтому они имеют вид (**??**). Следовательно, связи $G_\text{A}$ являются связями первого рода. Таким образом, всю совокупность связей можно разделить на связи второго и первого родов: $\{\Psi\} = \{\Phi, G\}$. Далее можно действовать с этой совокупностью связей независимо. Каждой связи первого рода соответствует калибровочная инвариантность. Поэтому мы накладываем ровно $\mathrm{L}$ канонических калибровочных условий $F^{\mathrm{A}}=0$. В результате полная система связей и калибровочных условий превращается в систему связей второго рода. Расширенный гамильтониан принимает вид

$$H_{\mathrm{E}}=H+\lambda_\mu\Phi^\mu+\lambda^{\mathrm{A}}G_{\mathrm{A}}+\pi_{\mathrm{A}}F^{\mathrm{A}}. \tag{3}$$

Далее, из условия сохранения связей и калибровочных условий во времени однозначно находятся все множители Лагранжа, и таким образом гамильтонова динамика однозначно определена.

Для того, чтобы корректно поставить задачу Коши для гамильтоновых уравнений движения, необходимо задать точку на поверхности связей и калибровочных условий, т.е. такие $q$ и $p$, которые удовлетворяют $2(\mathrm{M}+\mathrm{L})$ условиям:

$$\Phi=0,\qquad G=0,\qquad F=0.$$

Таким образом, при постановке задачи Коши можно задать произвольно только $\mathrm{N}-\mathrm{M}-\mathrm{L}$ обобщенных координат и столько же обобщенных импульсов. Напомним, что те степени свободы, для которых начальные данные Коши могут быть заданы произвольным образом, называются физическими. Это означает, что гамильтонова система со связями описывает

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\text{Размерность фазового}\\ \text{пространства}\end{matrix}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\text{Число связей}\\ \text{второго рода}\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\text{Число связей}\\ \text{первого рода}\end{matrix}\right\}$$

физических, т.е. распространяющихся степеней свободы при условии, что ранг матрицы (2) постоянен на поверхности связей (1). Обратим внимание на отсутствие множителя $1/2$ у связей первого рода, что связано с калибровочной инвариантностью.

Возможна ситуация, когда совокупное число связей и калибровочных условий равно размерности фазового пространства, и, следовательно, число физических степеней свободы равно нулю. Если число степеней свободы конечно, то связи и калибровочные условия определяют в фазовом пространстве только некоторый набор отдельных точек. В теории поля связи могут представлять собой дифференциальные уравнения по пространственным переменным и иметь решения, представляющие физический интерес. Такие модели в теории поля часто называют *топологическими*.

Расширенному гамильтониану (3) соответствует действие

$$S_{\mathrm{E}}=\int dt\big(p\dot q-H-\lambda_\mu\Phi^\mu-\lambda^{\mathrm{A}}G_{\mathrm{A}}-\pi_{\mathrm{A}}F^{\mathrm{A}}\big),$$

которое приводит к гамильтоновым уравнениям для $q,p$ и связям. Иногда часть связей и калибровочных условий можно однозначно разрешить относительно нефизических степеней свободы. В этом случае решения можно подставить непосредственно в действие (а не в уравнения движения) и получить эффективное действие для меньшего числа переменных. Это действие будет эквивалентно исходному действию, т.к. связи и калибровочные условия являются частью уравнений Эйлера–Лагранжа для расширенного действия (см. раздел **??**).

## 0.2 Переход от калибровочно инвариантного лагранжиана к гамильтониану

Гамильтонова динамика полей со связями нашла широкое применение в квантовой теории поля, поскольку калибровочные модели составляют основу современных моделей элементарных частиц. На практике исходным пунктом построения соответствующих моделей является лагранжева формулировка, в которой калибровочная инвариантность, а также инвариантность относительно преобразований Лоренца и других групп симметрии более прозрачна. В гамильтоновом формализме время выделено явно, и инвариантность модели далеко не очевидна. Кроме того, многие вычисления, особенно в рамках теории возмущений, удобнее проводить также в лагранжевом формализме, где легче следить за инвариантностью. Поэтому важным моментом в исследовании калибровочных моделей является переход от лагранжевой к гамильтоновой форме теории, которого мы вообще не касались в предыдущих разделах.

В разделе **??** был описан переход от лагранжева формализма к гамильтонову с помощью преобразования Лежандра. Этот переход содержит существенное ограничение: функция Лагранжа $L(q,\dot q,t)$ должна быть выпукла по скоростям, т.е. ее гессиан $\partial^2 L/\partial\dot q^i\partial\dot q^j$ положительно определен. В то же время в калибровочных моделях математической физики гессиан вырожден, и с формальной точки зрения переход от лагранжиана к гамильтониану не определен. Ниже мы покажем, что лагранжевы модели допускают гамильтонову формулировку независимо от вида гессиана.

Общая схема перехода от лагранжиана к гамильтониану для механической системы с $\mathrm{N}$ степенями свободы следующая. Пусть в конфигурационном пространстве $\mathbb{N}$ задан лагранжиан $L(q,\dot q,t)$. По заданному лагранжиану находятся импульсы

$$p_i:=\frac{\partial L}{\partial\dot q^i},\qquad i=1,\dots,\mathrm{N}. \tag{4}$$

Если гессиан вырожден, то эти равенства нельзя разрешить относительно скоростей. Однако справедливы следующие утверждения, в которых $q$, $\dot q$ и $p$ рассматриваются, как независимые функции времени. Для краткости, индекс $i$ там, где это не вызывает недоразумений, мы опустим.

**Предложение 0.2.1.** *Уравнения Эйлера–Лагранжа*

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}=0 \tag{5}$$

*эквивалентны уравнениям Гамильтона*

$$\dot q=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{6}$$

*если выполнены следующие равенства:*

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot q}, \tag{7}$$

$$H=p\dot q-L. \tag{8}$$

*Доказательство.* Допустим, что выполнены уравнения уравнения Гамильтона (6) и условия (7), (8). Из определения (8) следует равенство

$$\frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{\partial L}{\partial q}. \tag{9}$$

Теперь подставим определение импульсов (7) во второе уравнение (6) и получим уравнения Эйлера–Лагранжа (5).

Обратно. Пусть выполнены уравнения Эйлера–Лагранжа (5) и условия (7), (8). Подстановка равенства (9) и определения обобщенных импульсов (7) в уравнения Эйлера–Лагранжа (5) дает второе уравнение Гамильтона (6). Из определения гамильтониана (8) следует равенство

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial p} = \dot{q},$$

которое совпадает с первым уравнением Гамильтона (6). □

**Предложение 0.2.2.** *Гамильтониан (8), в котором обобщенные импульсы и координаты связаны соотношением (7), не зависит от скоростей $\dot{q}$, т.е. $H = H(q,p,t)$.*

*Доказательство.* Продифференцируем определение (8) по скоростям:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0,$$

т.к. выполнено условие (7). □

В доказательствах приведенных утверждений вид гессиана никак не использован, т.к. мы нигде не разрешали равенства (4) относительно скоростей. Поэтому гамильтонова формулировка лагранжевой теории возможна также для знаконеопределенных и вырожденных гессианов. Если гессиан положительно или отрицательно определен, то существует преобразование Лежандра и определение обобщенных импульсов (4) можно, в принципе, разрешить относительно скоростей $\dot{q}$. Если скорости как функции координат и импульсов находятся явно, то, подставляя их в определение (8), найдем явный вид гамильтониана. В случае вырожденного гессиана в общем случае скорости нельзя выразить через координаты и импульсы. Поэтому регулярный способ построения гамильтониана отсутствует. Тем не менее гамильтониан существует, единственен и, согласно предложению 0.2.2, не зависит от скоростей. В таких случаях гамильтониан (8) находится "методом пристального всматривания". Во всех известных автору случаях этот метод работает и позволяет найти явный вид гамильтониана.

**Определение.** Модель с вырожденным гессианом,

$$\mathsf{det}\,\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = 0, \tag{10}$$

называется *вырожденной.* □

**Пример 0.2.1.** Пусть лагранжиан зависит от двух полей $\{q^i\} = \{\varphi, A\}$ и имеет вид

$$L := \frac{1}{2}(\dot{\varphi} - A)^2, \qquad S := \int dt L. \tag{11}$$

Гессиан модели равен

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, очевидно, вырожден. Уравнения Эйлера–Лагранжа для рассматриваемой вырожденной модели

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \varphi} &= -\ddot{\varphi} + \dot{A} = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta A} &= -\dot{\varphi} + A = 0. \end{aligned}$$

зависимы, т.к. первое уравнение получается из второго дифференцированием по времени.

Рассмотрим задачу Коши для полученной системы уравнений. Из второго уравнения следует, что данные Коши (имеются в виду значения функций и их производных) не могут быть заданы произвольным образом. Пусть заданы допустимые (т.е. совместимые с уравнениями Эйлера–Лагранжа) начальные условия:

$$\varphi(0) = a, \qquad A(0) = b, \qquad \dot\varphi(0) = b, \qquad \dot A(0) = c,$$

где $a, b, c$ – произвольные постоянные. Нетрудно проверить, что общее решение задачи Коши имеет вид

$$\varphi = a + bt + \frac{1}{2}ct^2 + \int_0^t dt' f(t'), \qquad A = b + ct + f(t), \tag{12}$$

где $f(t)$ – произвольная функция, удовлетворяющая начальным условиям $f(0) = 0$ и $\dot f(0) = 0$. Таким образом, решение задачи Коши для рассматриваемой модели содержит функциональный произвол. Это произошло потому, что среди уравнений Эйлера–Лагранжа для двух неизвестных функций $\varphi(t)$ и $A(t)$ только одно является независимым. В свою очередь зависимость уравнений движения

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\delta S}{\delta A} = 0$$

является следствием второй теоремы Нетер, поскольку и действие, и лагранжиан инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\varphi \mapsto \varphi + \alpha, \qquad A \mapsto A + \dot\alpha,$$

где $\alpha(t)$ – произвольная функция времени.

Рассмотренная модель имеет простой геометрический смысл. Функция $A(t)$ определяет локальную форму связности на тривиальном главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{R}, \pi, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, где $t \in \mathbb{R}$ – база, а структурной группой является группа сдвигов $\mathbb{R}$ вещественной прямой. Кривизна этой связности равна нулю, т.к. база одномерна. Поле $\varphi(t)$ – это сечение тривиального ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{R}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{P}) \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Типичным слоем этого расслоения является прямая $\mathbb{R}$, на которой структурная группа действует сдвигами. Лагранжиан (11) представляет собой квадрат ковариантной производной, где $dtA(t)$ – локальная форма связности.

Перейдем к гамильтонову формализму. Импульсы, сопряженные полям $\varphi$ и $A$, равны

$$p := \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi - A, \qquad P := \frac{\partial L}{\partial\dot A} = 0.$$

Данные соотношения позволяют определить только одну скорость $\dot\varphi = p + A$, а равенство $P = 0$ является связью. При этом скорость $\dot A$ остается произвольной. Гамильтониан системы с точностью до интегрирования по частям имеет вид

$$H = p\dot\varphi + P\dot A - L = \frac{1}{2}p^2 + pA - \dot AP,$$

где последнее слагаемое можно отбросить ввиду наличия связи. Поскольку $[P, H] = 0$ при $P = 0$ и $[P, P] = 0$, то равенство $P = 0$ представляет собой первичную связь первого рода. Других связей в теории не возникает. Полный гамильтониан получается из $H$ после добавления связи первого рода, $H_{\text{т}} := H + \lambda P$. Таким образом, скорость $\dot{A}$ в рассматриваемой модели играет роль множителя Лагранжа.

Для однозначного фиксирования решения задачи Коши необходимо наложить каноническую калибровку, например, $A = 0$. Тогда произвольная функция однозначно фиксируется $f(t) = -b - ct$, и решение (12) задачи Коши примет вид $\varphi = b =$ const. □

Сначала схематично рассмотрим вырожденные модели в лагранжевом формализме, не вдаваясь в анализ условий при которых описанные операции имеют смысл. Распишем уравнения Эйлера–Лагранжа (5) подробнее:

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} + \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{13}$$

Поскольку гессиан вырожден, то данную систему уравнений нельзя разрешить относительно вторых производных $\ddot{q}^i$, и теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (в классе вещественно аналитических функций) неприменима.

Допустим, что ранг гессиана постоянен во всем конфигурационном пространстве и равен $\mathrm{N} - \mathrm{M}_1 < \mathrm{N}$. Тогда у гессиана существует $\mathrm{M}_1$ линейно независимых в каждой точке конфигурационного пространства собственных векторов $\theta^{(\mu_1)i}(q, p, t)$, где индекс $\mu_1 = 1, \ldots, \mathrm{M}_1$ нумерует эти векторы, соответствующих нулевому собственному значению:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \theta^{(\mu_1)j} = 0.$$

Умножив уравнения Эйлера–Лагранжа (13) на $\theta^{(\mu_1)}$, получим $\mathrm{M}_1$ независимых условий

$$\Theta^{(1)} = \{\Theta^{(\mu_1)}(q, \dot{q}, t)\} = 0, \qquad \mu_1 = 1, \ldots \mathrm{M}_1, \tag{14}$$

где

$$\Theta^{(\mu_1)} := \theta^{(\mu_1)i} \left( \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right), \tag{15}$$

на обобщенные координаты и скорости, которые должны быть удовлетворены во все моменты времени. Наличие этих условий говорит нам о том, что при постановке задачи Коши (имеются в виду значения всех координат и скоростей) для системы уравнений (13) нельзя задать все координаты и скорости произвольным образом. Для того, чтобы задача Коши имела решение, начальные данные обязаны удовлетворять условиям (15). Эти условия называются *первичными связями в лагранжевом формализме*. Однако выполнения первичных связей недостаточно для существования решения задачи Коши. Действительно, допустим, что первичные связи удовлетворены в начальный момент времени, тогда нет никакой гарантии в том, что условия (15) будут выполнены для всех $t > 0$.

Для нахождения полного набора необходимых условий на начальные данные необходимо продифференцировать условия (15) по времени и исключить вторые производные с помощью уравнений Эйлера–Лагранжа. В результате может получиться тождество 0=0 или некоторая линейная комбинация первичных связей (15). В этом случае никаких дополнительных соотношений между скоростями и импульсами не возникает. Однако в общем случае возможно появление новых функционально независимых от первичных связей (15) условий на координаты и скорости, которые называются вторичными связями. Обозначим их совокупность

$$\Theta^{(2)} = \{\Theta^{(\mu_2)}(q, \dot{q}, t)\} = 0, \qquad \mu_2 = 1, \ldots, \mathrm{M}_2.$$

Для корректной постановки задачи Коши этот процесс необходимо продолжить, и продифференцировать вторичные связи по времени. В результате возможно появление третичных функционально независимых связей, которые мы обозначим $\Theta^{(\mu_3)}$, $\mu_3 = 1, \dots, \mathrm{M}_3$. Этот процесс рано или поздно оборвется, скажем, на шаге $k$, т.к. фазовое пространство имеет размерность $2\mathrm{N}$ и, следовательно, допускает не более $2\mathrm{N}$ функционально независимых условий. В дальнейшем, для краткости, все связи, за исключением первичных, будем называть вторичными.

В принципе, возможно, что на некотором этапе вычисления связей возникнет противоречие типа $1 = 0$. В этом случае уравнения Эйлера–Лагранжа являются противоречивыми, и мы их рассматривать не будем.

После нахождения всех функционально независимых связей в лагранжевом формализме можно ставить задачу Коши. Итак, для того, чтобы задача Коши для системы уравнений Эйлера–Лагранжа (13) имела решение необходимо, чтобы начальные данные удовлетворяли всем связям

$$\Theta := \{\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \dots, \Theta^{(k)}\} = 0,$$

число которых равно $\mathrm{M}_1 + \ldots + \mathrm{M}_k$, т.к. они должны быть выполнены во все моменты времени. Мы видим, что с точки зрения постановки задачи Коши все связи равноправны, и их деление на первичные и вторичные отражает лишь процесс их получения. Если найден полный набор связей, то об их делении на первичные и вторичные можно забыть. Нахождение всех связей в какой либо модели зависит от конкретного вида лагранжиана и содержит элементы искусства.

Перейдем к анализу вырожденных моделей в гамильтоновом формализме. Для простоты предположим, что лагранжиан и, следовательно, гамильтониан не зависят от времени явно. Рассмотрим определение импульсов (4) как систему уравнений на скорости. По теореме о неявной функции система уравнений (4) локально разрешима относительно скоростей тогда и только тогда, когда гессиан невырожден (10). Поэтому для вырожденных моделей не все скорости $\dot{q}^i$ можно выразить через координаты и сопряженные импульсы. Допустим, что ранг гессиана постоянен и равен $\mathrm{N} - \mathrm{M}_1 < \mathrm{N}$ во всем касательном расслоении к конфигурационному пространству $(q, \dot{q}) \in \mathbb{T}(\mathbb{M})$. Тогда в теории возникают $\mathrm{M}_1$ функционально независимых *первичных связей*, совокупность которых обозначим

$$\Phi^{(1)} := \{\Phi^{\mu_1}(q, p)\} = 0, \qquad \mu_1 = 1, \dots, \mathrm{M}_1.$$

Отметим, что, если лагранжиан квадратичен по скоростям, то все первичные связи линейны по импульсам.

Теперь рассмотрим эволюцию первичных связей во времени. Для постановки вариационной задачи для системы со связями в гамильтоновом формализме используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Поэтому модифицируем гамильтониан, добавив к нему первичные связи,

$$H^{(1)} := H + \lambda_{\mu_1}\Phi^{\mu_1}.$$

Тогда условия сохранения первичных связей во времени примут вид

$$\dot{\Phi}^{(1)} = \left[\Phi^{(1)}, H^{(1)}\right] = 0. \tag{16}$$

Для того, чтобы модель была самосогласована, первичные связи должны сохраняться, и, следовательно, правая часть (16) должна быть равна нулю. В результате получится некоторая система уравнений на канонические переменные и множители

Лагранжа. Если эта система уравнений определяет все множители Лагранжа, число которых совпадает с числом уравнений, то никаких дополнительных связей на координаты и импульсы не возникает (связи второго рода). Возможна также ситуация, когда уравнения (16) определяют только часть лагранжевых множителей (возможно, ни одного), и возникает некоторое соотношение между каноническими переменными, которое обращается в нуль на поверхности первичных связей. Тогда также не возникает никаких дополнительных ограничений на канонические переменные. Однако не исключен случай, когда на поверхности первичных связей (16) возникают новые дополнительные ограничения. Выделим среди них функционально независимые между собой и с первичными связями условия

$$\Phi^{(2)} := \{\Phi^{\mu_2}(q,p)\} = 0, \qquad \mu_2 = 1,\dots,\mathrm{M}_2,$$

которые называются *вторичными* связями. Как и ранее, модифицируем гамильтониан, добавив вторичные связи,

$$H^{(2)} := H + \lambda_{\mu_1}\Phi^{\mu_1} + \lambda_{\mu_2}\Phi^{\mu_2}.$$

Условие сохранения вторичных связей во времени

$$\dot{\Phi}^{(2)} = \left[\Phi^{(2)}, H^{(2)}\right] = 0$$

может привести к возникновению $\mathrm{M}_3$ третичных связей $\Phi^{(3)} = 0$, и т.д. Поскольку фазовое пространство $\mathbb{N}$ конечномерно, то эта процедура оборвется на конечном числе шагов, которое мы обозначим через $k \le 2\mathrm{N}$. В результате мы получим полную систему связей в гамильтоновом формализме

$$\{\Phi^{\mu}\} = \{\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(k)}\}, \qquad \mu = 1,\dots,\mathrm{M}_1 + \ldots + \mathrm{M}_k, \tag{17}$$

которые необходимо добавить к полному гамильтониану

$$H_{\text{т}} := H + \lambda_{\mu}\Phi^{\mu}.$$

Процесс нахождения всех функционально независимых связей зависит от вида гамильтониана и первичных связей, вид которых определен неоднозначно. Поэтому общего алгоритма получения связей в настоящее время нет. Эта задача бывает сложна и требует перебора многих вариантов.

Поскольку теория содержит связи, которые должны удовлетворяться во все моменты времени, то начальные данные также должны удовлетворять связям (17). Это является необходимым условием существования решения задачи Коши. В общем случае мы не можем гарантировать существование и единственность решения этой задачи, но необходимое условие получено. С этой точки зрения деление связей на первичные и вторичные несущественно и, как и в лагранжевом формализме, только отражает последовательность появления связей. После того, как все связи получены, об их делении на первичные и вторичные можно забыть. Следующий шаг состоит в анализе связей и их разделении на связи первого и второго рода, как это было описано в предыдущем разделе.

## 0.3 Гамильтонова динамика в теории поля

Рассмотрим лоренцево многообразие $(\mathbb{M}, g)$ с координатами

$$\{x^{\alpha}\} = \{x^0, \boldsymbol{x}\} = \{x^0, x^{\mu}\}, \qquad \alpha = 0, 1 \ldots n-1, \quad \mu = 1,\dots,n-1.$$

Предположим, что координата $x^0 = t$ является временем и все сечения $t = \mathsf{const}$ пространственноподобны. Для простоты будем считать, что пространство-время представляет собой прямое произведение вещественной прямой $t \in \mathbb{R}$ (время) на $(n-1)$-мерное многообразие $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$ (пространство). Рассмотрим действие (**??**) с лагранжианом, зависящим от некоторого набора полей $\varphi = \{\varphi^a(t, \boldsymbol{x})\}$, $a = 1 \dots \mathrm{N}$, и их первых производных

$$S[\varphi] = \int_{\mathbb{M}} dt d\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \hat{\partial}\varphi) = \int dt L, \tag{18}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени ($\dot{\varphi}^a := \partial\varphi^a/\partial t$), шляпка обозначает частные производные полей только по пространственным координатам ($\hat{\partial}\varphi := \{\partial_\mu\varphi\}$), и явно выделено интегрирование по времени. Функция

$$L := \int_{\mathbb{U}} d\boldsymbol{x}\, \mathcal{L} \tag{19}$$

называется *лагранжианом*, а $\mathcal{L}$ – *лагранжевой плотностью.* Для дальнейшего рассмотрения возможная явная зависимость лагранжевой плотности от координат несущественна, и мы ее опускаем. Кроме этого, лагранжеву плотность в дальнейшем, для краткости, мы будем также называть лагранжианом, поскольку из контекста всегда ясно о чем идет речь.

В общем случае уравнения движения (уравнения Эйлера–Лагранжа) имеют второй порядок по времени. В теории поля для уравнений движения ставится обычно смешанная задача. Для полевых переменных решается задача Коши по времени при заданных граничных условиях на пространственной границе:

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0, \qquad \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \varphi_1, \qquad \varphi\big|_{x \in \partial\mathbb{U}} = \varphi_{\partial\mathbb{U}}.$$

Такая формулировка полевой динамики называется *лагранжевой.*

Помимо лагранжевой важную роль в математической физике играет *каноническая* или *гамильтонова* формулировка теории поля. Каноническая формулировка явно нарушает лоренц и общекоординатную инвариантность, но в то же время делает теорию гибче при исследовании задачи Коши. Помимо этого гамильтонова формулировка является основой для канонического квантования, которое в настоящее время рассматривается, как наиболее последовательный способ перехода от классической к квантовой теории поля.

Для канонической формулировки теории поля нам понадобится пространственная $\delta$-функция и ее производные, определенные на пространственных сечениях $\mathbb{U}$. Для этого нам достаточно рассматривать класс полей, компоненты которых являются достаточно гладкими функциями на $\mathbb{U}$ для всех моментов времени $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, мы предполагаем, что поля ведут себя таким образом, что все встречающиеся функционалы определены. В дальнейшем мы не будем останавливаться на этом вопросе, т.к. функциональные пространства зависят от выбора лагранжиана и постановки задачи. Этот вопрос требует исследования в каждом конкретном случае.

Переход от лагранжевой формулировки к гамильтоновой представляет собой (обобщенное) преобразование Лежандра (см. раздел **??**) лагранжиана (19) по скоростям $\dot{\varphi}$. Гамильтоновы уравнения движения имеют первый порядок по времени, при этом второй порядок уравнений по пространственным производным сохраняется. По аналогии с механикой функции $\varphi^a$ называются *обобщенными координатами*, а $\dot{\varphi}^a$ – *обобщенными скоростями. Обобщенные импульсы*, сопряженные к $\varphi^a$, определим соотношением

$$p_a(x) = p_a(t, \boldsymbol{x}) := \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}^a} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^a}. \tag{20}$$

При этом функции $\varphi^a$ и $\dot\varphi^a$, от которых зависит лагранжиан, рассматриваются, как независимые переменные. Здесь и в дальнейшем все вариации полей считаются финитными функциями на $\mathbb{U}$, и граничные члены не рассматриваются. Это соответствует не зависящим от времени граничным условиям

$$\varphi\big|_{\boldsymbol{x}\in\partial\mathbb{U}} := \varphi_{\partial\mathbb{U}}$$

на пространственной границе $\partial\mathbb{U}$.

Иными словами, полевую теорию мы рассматриваем как механическую систему с бесконечным числом переменных (обобщенных координат), которые параметризуются точками пространства $\boldsymbol{x}\in\mathbb{U}$ и индексом $a$. Этому соответствует замена частных производных на вариационные, а суммирование по переменным включает в себя интегрирование по пространству.

В дальнейшем, для краткости, мы часто будем писать $\varphi(\boldsymbol{x})$ вместо $\varphi(t,\boldsymbol{x})$, подразумевая, что все поля зависят от времени $t$, как от параметра и рассматриваются в один и тот же момент времени.

Преобразование Лежандра по скоростям приводит к следующей *функции Гамильтона* или *гамильтониану*

$$H(\varphi,\hat\partial\varphi,p) := \int d\boldsymbol{x}\,\Big[p_a\dot\varphi^a - \mathcal{L}(\varphi,\hat\partial\varphi,\dot\varphi)\Big] = \int d\boldsymbol{x}\,\mathcal{H}(\varphi,\hat\partial\varphi,p). \tag{21}$$

Функция $\mathcal{H}(\varphi,\hat\partial\varphi,p)$ называется *гамильтоновой плотностью*. В дальнейшем гамильтонову плотность мы также будем называть гамильтонианом, т.к. из контекста всегда ясно, о чем идет речь.

Преобразование Лежандра определено в том случае, если квадратичная форма

$$\int d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}'\frac{\delta^2 L}{\delta\dot\varphi^a(\boldsymbol{x})\delta\dot\varphi^b(\boldsymbol{x}')}f^a(\boldsymbol{x})f^b(\boldsymbol{x}') = \int d\boldsymbol{x}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi^a(\boldsymbol{x})\partial\dot\varphi^b(\boldsymbol{x})}f^a(\boldsymbol{x})f^b(\boldsymbol{x}) \tag{22}$$

положительно определена для всех $\varphi^a$ и $\partial_\mu\varphi^a$. Предыдущее равенство справедливо, т.к. гессиан, который равен второй вариационной производной от лагранжиана, пропорционален $\delta$-функции:

$$\frac{\delta^2 L}{\delta\dot\varphi^a(\boldsymbol{x})\delta\dot\varphi^b(\boldsymbol{x}')} = \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi^a(\boldsymbol{x})\partial\dot\varphi^b(\boldsymbol{x})}\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}).$$

Пусть задано два функционала

$$F := \int_{\mathbb{U}} d\boldsymbol{x}\,\mathcal{F}(\varphi,\hat\partial\varphi,p,\hat\partial p) \qquad \text{и} \qquad G := \int_{\mathbb{U}} d\boldsymbol{x}\,\mathcal{G}(\varphi,\hat\partial\varphi,p,\hat\partial p). \tag{23}$$

Предположим, что все поля и их производные достаточно быстро убывают при приближении к границе $\partial\mathbb{U}$, так, чтобы в выражениях для функционалов можно было интегрировать по частям, отбрасывая все граничные члены. Определим для них скобку Пуассона следующим равенством

$$[F,G] := \int d\boldsymbol{x}\left(\frac{\delta F}{\delta\varphi^a(x)}\frac{\delta G}{\delta p_a(x)} - \frac{\delta F}{\delta p_a(x)}\frac{\delta G}{\delta\varphi^a(x)}\right), \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta\varphi^a} &= \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi^a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)},\\ \frac{\delta F}{\delta p_a} &= \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial p_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(\partial_\mu p_a)},\end{aligned}$$

и аналогичные равенства для функциональных производных от $G$. Эта скобка, очевидно, билинейна и антисимметрична. Нетрудно проверить, что она удовлетворяет правилу Лейбница и тождеству Якоби. Тем самым скобка Пуассона определяет пуассонову структуру на множестве функционалов вида (23).

Поскольку

$$\varphi^a(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{U}} d\boldsymbol{y}\, \varphi^a(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \qquad \text{и} \qquad p_a(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{U}} d\boldsymbol{y}\, p_a(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),$$

то справедливы канонические одновременны́е скобки Пуассона между полями и сопряженными импульсами:

$$\begin{aligned} \big[\varphi^a(\boldsymbol{x}), p_b(\boldsymbol{y})\big] &= \delta^a_b \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \\ \big[\varphi^a(\boldsymbol{x}), \varphi^b(\boldsymbol{y})\big] &= 0, \\ \big[p_a(\boldsymbol{x}), p_b(\boldsymbol{y})\big] &= 0. \end{aligned}$$

Скобки Пуассона между полевыми переменными, взятыми в различные моменты времени, не определены.

Нетрудно проверить, что уравнения Эйлера–Лагранжа для действия (18) эквивалентны уравнениям Гамильтона:

$$\dot\varphi^a = [\varphi^a, H], \qquad \dot p_a = [p_a, H]. \tag{25}$$

В общем случае эволюция во времени произвольного функционала вида (23) задается его скобкой Пуассона с гамильтонианом:

$$\dot F = [F, H].$$

Выше мы обобщили гамильтонову механику систем точечных частиц на теорию поля в случае, когда гессиан модели невырожден и определено преобразование Лежандра по скоростям. Примеры дают вещественное и комплексное скалярные поля, рассмотренные в разделах **??** и **??**.

**Определение.** Модель теории поля называется *сингулярной*, если гессиан

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\dot\varphi^a(\boldsymbol{x})\partial\dot\varphi^b(\boldsymbol{x})}$$

вырождена хотя бы в одной точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$. □

В современной теории поля важную роль играют калибровочные модели, которые являются вырожденными. В этом случае в гамильтоновой формулировке возникают связи на канонические переменные, которые выделяют в бесконечномерном фазовом пространстве некоторое подпространство. В настоящее время гамильтонов анализ полевых моделей со связями развит недостаточно полно. На практике действуют по аналогии с механикой точечных частиц. Как и ранее, связи делятся на связи первого и второго рода, а также на первичные и вторичные. В большинстве случаев такой подход дает удовлетворительную гамильтонову формулировку теории поля. Примерами со связями первого рода являются электромагнитное поле (раздел **??**) и поле Янга–Миллса (раздел **??**). К связям первого рода приводит также общая теория относительности, гамильтонова формулировка которой дана в главе **??**.

Для поля Прока́ (раздел **??**) и спинорного поля (раздел **??**) возникает гамильтонова формулировка со связями второго рода.

Существенным отличием вырожденной теории поля от механики точечных частиц является то обстоятельство, что связи в общем случае являются не алгебраическими уравнениями, а уравнениями в частных производных по пространственным координатам. В этих случаях возникают важные вопросы о разрешимости связей на пространственных сечениях $\mathbb{U}$ при заданных граничных условиях. Особенно, если пространственные сечения топологически нетривиальны.

Сравнение гамильтониана (21) с определением тензора энергии-импульса (**??**) показывает, что гамильтонова плотность совпадает с $(0,0)$ компонентой энергии-импульса: $\mathcal{H} = T_0{}^0$. Численное значение гамильтоновой плотности $\mathcal{H}$ хотелось бы назвать плотностью энергии системы полей. При этом возникает неоднозначность. Уравнения движения не изменятся, если к $\mathcal{H}$ добавить частную производную от произвольной функции полей. При фиксированных граничных условиях это меняет полную энергию на постоянную величину, что допустимо. Однако плотность энергии при этом может существенно меняться.

При гамильтоновой формулировке теории поля может возникнуть еще одна трудность. В случае конечного числа частиц все связи делятся на связи первого и второго родов. В теории поля могут появиться связи, которые нельзя отнести ни к одному из указанных типов. С одной стороны, скобка Пуассона связей не обращается в нуль на поверхности связей, а, с другой стороны, “матрица” скобок Пуассона для связей необратима. В разделе **??** будет рассмотрен пример, где скобка Пуассона двух связей равна производной $\delta$-функции по пространственной координате. Она отлична от нуля на поверхности связей и, следовательно, не относится к связям I рода. С другой стороны, если рассматривать $\delta'$ как оператор в функциональном пространстве, то он необратим, поскольку имеет нетривиальное ядро (все постоянные функции отображаются в нуль). Поэтому такие связи нельзя отнести к связям II рода, поскольку они не позволяют однозначно определить множители Лагранжа из условия сохранения связей во времени. Общей теории для моделей такого типа в настоящее время не существует.